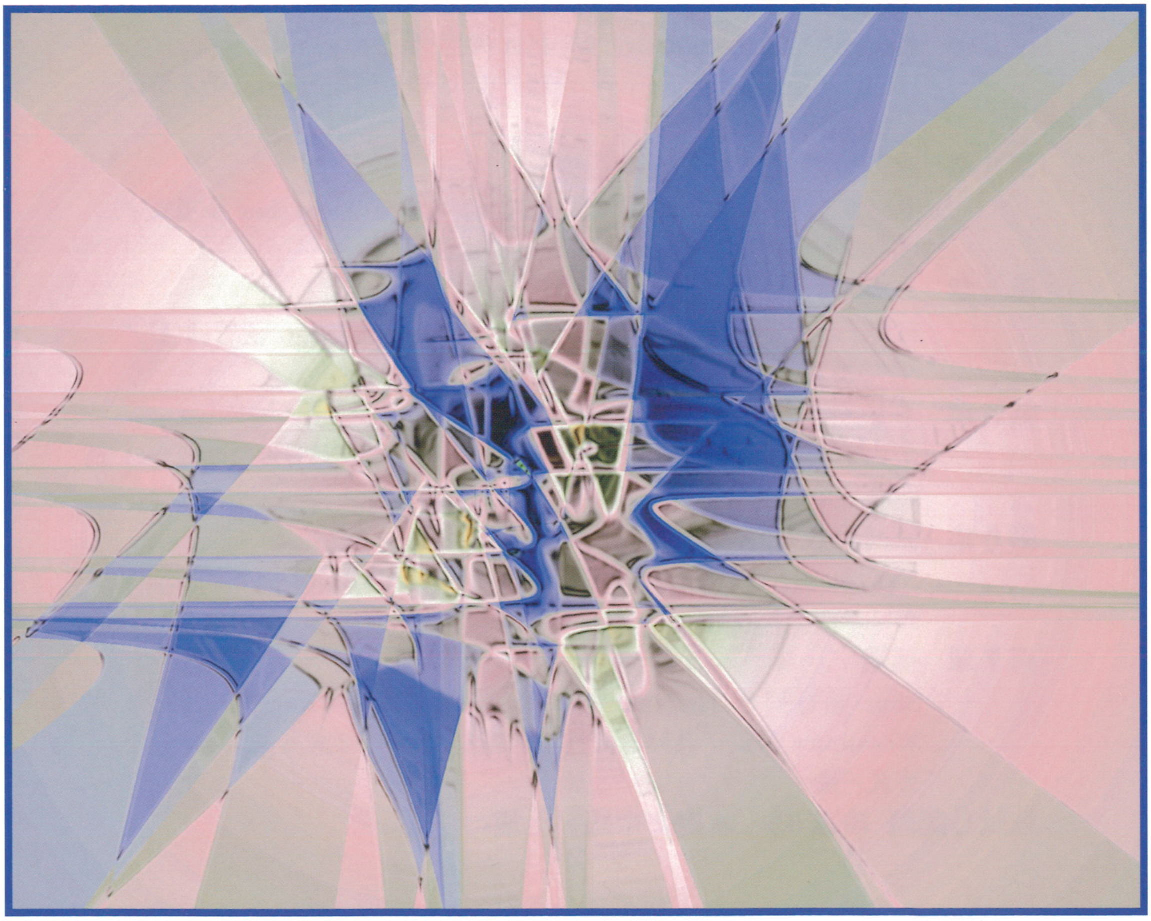
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2013年3月1日発行　第51巻3号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

3
2013

特集 光と物理学
自然を目で感じる



No.597

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 597 March 2013

光と物理学
自然を目で感じる

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2009年/11 省略
2009年/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ［物理編］
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想［物理編］
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理
2013年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想

数理科学臨時別冊一覧

12年/1 現象から方程式を創り出す
12年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12年/4 弦理論の代数的基礎
12年/5 アインシュタイン方程式
12年/6 CP対称性の破れ
12年/7 弦の場の理論
12年/9 超弦理論の応用
12年/10 複素多様体論講義
12年/11 幾何学の量子化
12年/12 量子力学から超対称性へ
13年/1 行列解析ノート

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN 多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN 広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

March 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 597

特集／光と物理学

巻頭言

もっと現象を見よう

久我　隆弘

編集部から本特集『光と物理学』をとりまとめる依頼がきた際,「なぜ私が」とまず思いました.その一番の理由は,『数理科学』はその名の示すように,実験物理屋の私にとっては難しい数式ばかりが載っているといった先入観があったからです.それでもお引き受けしようと決めたのは,『自然を目で感じる』という副題が気に入ったからです.

確かに,物理学では数式（方程式）を言葉代わりに使って世界中の人々と会話・議論します.その意味で数式は重要です.ただ,純粋な数学と大きく異なる点は,対象が自然界・自然現象だということです.ですので,いくら数式から数学的に正しい結果を導いたとしても,それが実際に起こる現象を正しく記述・表現できなければ,どこかに間違いがある,あるいは何か見落としているなど,使った数式には適用限界があるのだと結論しなければなりません.このように,「**まず現象ありき**」というのが物理学なのです.

例えば私の専門でもある量子光学では,電磁場を量子化する際,生成・消滅演算子と呼ばれる演算子が出てきます.文字通り,光子を1個生成させたり消滅させる演算子です.これらのうち消滅演算子を使えば,考えている対象（物理系）から光子を減らす（取り出す）ことで,系からエネルギーを取り出すことができます.そしてこの消滅演算子を何度も繰り返して使えば,系のエネルギーを負の無限大にまで小さくすること,つまり系から無限のエネルギーを取り出すことが“数学的”には可能です.しかし,大部分の読者の方にも同意していただけると思いますが,「そんな都合の良い話は現実にはない」と考えるのが自然なのです.そう,エネルギーをいくらでも取り出すことのできる状態が存在するのは“物理学的”におかしいので,物理学では「エネルギーには下限がある」といった**“自然な”要請**を設けます.この下限にあたる状態が,真空状態とよばれる光子が1個もない状態です.

例があまり良くなかったかもしれませんが,似たような“自然な”要請は物理学のいろいろな場所で登場してきます.私がここで強調しておきたい点は,「数式（数学）的には正しくても,物理学的には不十分な場合がある」ということです.そしてそれを見極めるのが,直観とでも言うのでしょうか,センスとでも言うのでしょうか,数式では決して表すことのできない**“物理学的”な感覚**だと私は思っています.そしてこの感覚を養うためには,自然現象をつぶさに観察することが一番なのです.

このように本特集は,『自然を目で感じる』をキーワードとして,光が関与する自然現象と,その背景にある学問としての物理学とを結びつけることを企図しました.ただ,光が関与する現象は

多岐にわたるため，本特集で取り上げる話題は光そのものが主役を務める現象だけに絞ることにしました．ですので，例えば光と相互作用をする物質の性質を詳しく知っておかなければならないような話題は取り上げていません．

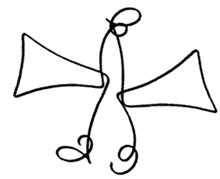
構成・内容としては，まず基本的な事柄としての光の特性を理解していただくために，実際に目で感じることは少ないとは思うのですが，光の“波動性と粒子性”や，光速度測定に関する解説を冒頭に配しました（『粒子と波動』，『光速度測定にみる物理学の発展史』）．続いて，日常観察することのできる自然現象として，虹や空の色の起源（『虹の七色』，『空の青さ』），物体の温度と色との関係（『黒体輻射』）を取り上げました．そして最後は光を使った応用として，古くから（とはいっても半世紀ほどですが…）よく知られている立体画像や，最近だいぶ認知度も上がってきた角運動量をもつ光についての解説も載せています（『ホログラフィー』，『光渦と角運動量』）．また，コラムでは次世代の時間標準候補でもある『光領域における原子時計』の話を取り上げました．

折しも，本特集の原稿を執筆している最中の2012年10月に発表されたノーベル物理学賞の選定理由は，『個々の量子系を測定，操作する画期的な実験的手法の開発』でした．具体的には，一個の原子やイオンと一個の光子との相互作用を人為的に自由に制御できる手法・装置を開発したことが受賞対象となったのです．もちろん，『個々の量子系』は人間が直接目で見て感じられる世界ではないのですが，様々な最先端機器の“目”を通して見た世界は，日常のそれとはずいぶんと違うようです．ただ，だからこそ私たちは自然現象の多様さ，すばらしさに大きく感動し，自然界をより深く理解し，あわよくば利用しようという，さらなる挑戦への意欲がふつふつと湧いてくるのです．

読者の方々も，方程式を解くのに疲れてきたときは，身近な自然現象にちょっと目を向け，「なぜそうなるのか」と考えてみてはいかがでしょうか．本特集がその一助になれば良いと思っています．

（くが・たかひろ，東京大学大学院総合文化研究科）

粒子と波動



上田　正仁

Abstract

粒子と波動は様々な自然現象を記述する上での最も基本的な概念であるだけではなく，我々の世界観を形成する上でも中心的な役割を果たしてきた．粒子の運動を記述するニュートン力学は，力学的世界観の基礎となった．電気，磁気，光に関する波動現象を統一的に記述するマクスウェル理論は，近接作用と場の概念を物理学に導入した．そして，粒子性と波動性という異質な概念を統一する理論である量子力学は，未来が確率的にしか予言できないという統一の代償と引き換えに量子暗号や量子コンピューターのような古典論では不可能な新しい可能性を提示した．本稿では粒子と波動をキーワードとして，これらの理論を概観し，その現代的な意義について考察する．

1. はじめに

粒子性と波動性は自然現象の異なった側面を記述する概念として発展してきた．日常経験においてもこれらは異なった情況下で現れる．例えば，水などの液体は波動現象を示し，波立ち，干渉効果を示す．液体だけでなく，ゴムのような弾性体も振動などの波動現象を示す．固体も音波などを伝搬する．一般に連続媒質は変形や圧縮を通じて波動性を示す．波の理想化された概念は，決まった波数と振動数を持つ平面波であり，調和振動子でモデル化される．他方，石などの剛体は粒子として振る舞い，その運動は軌跡として記述される．粒子性の理想化された概念は質量を持つが空間的な広がりを持たない点状の質点である．電子も量子力学が現れる以前は質点として取り扱われてきた．単独の質点は広がりを持たないために波動性を示すことができず，また，波動性を担う連続媒質は粒子の軌跡を記述できない．数学的な観点から見ると，質点の運動は時間のみの関数なので全微分で記述されるが，波動現象は場所と時間の関数なので偏微分方程式で記述される．このように，粒子と波動は現象面でも理論面でも異なった性質をもつ概念である．

歴史的に興味深いのは光である．ニュートンは白色光をプリズムに通すと，様々な色に分かれるという光の分散現象を発見した．このことからニュートンは白色光はいろいろな色をもった微粒子の混合物であると考えた．光がまっすぐに進む性質や鏡で反射される性質は光が粒子の集まりであると考えることによって自然に理解できる．これを光の「微粒子説」という．しかし，光の粒子説では回折や干渉現象が上手く説明できないことから，ホイヘンスらによる光の波動説がその後主流となった．その2世紀以上後に，アインシュタインの光量子仮説によって光が波動性と同時に粒子性を持つことが認識された．

量子論の誕生以前は，波と粒子は別々の法則によって支配されていた．波動現象は波長や振動数

によって特徴づけられ，波動方程式によって記述される．他方，粒子の性質は，質量や位置，速度によって特徴づけられ，ニュートンの運動方程式に従う．このように，粒子性と波動性は別々な学問体系として発展してきた．

自然現象が粒子の性質と波動の性質によって別々に記述されるという情況は量子論の登場によって一変した．これまで波だと思われていた光のエネルギーがとびとびの値を持つという粒子性が明らかになり，また，粒子だと思われていた電子が回折現象という波動性を示すことが実験的に示された．このように，量子力学は粒子性と波動性を統一する学問として登場した．しかし，未来が確率的にしか予言できないという統一の代償が存在することも明らかになり，アインシュタインやシュレーディンガーなど量子論の創始者を悩ませることになった．そして，近年になってそのような量子論の持つ確率的性格やエンタングルメントの性質が量子暗号や量子計算のような古典的には不可能な新たなデバイス原理へと応用できることが認識された．

以下では，粒子性を記述する法則の代表例としてニュートン力学を，波動性を記述する法則の代表例としてマクスウェル理論を概観し，その意義について考察する．さらに，量子力学が両者をいかに統一したかについて述べる．

2. ニュートン力学

粒子の運動を記述するニュートンの運動方程式は，ティコ・ブラーエやケプラーなどによる天体に関する膨大な観測結果を統一的に理解しようという過程で発見された．地球上では摩擦などの余分な効果がたくさん存在するために純粋な形での運動の法則を発見することがかえって困難だったのかもしれない．ニュートン力学はリンゴが木から落ちるというような地上の現象から，惑星の運動のような宇宙スケールの現象までを統一的に理解することを可能にする学問体系である．

ニュートンの運動方程式は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \qquad (1)$$

で与えられる．ここで，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ は質点の位置 $\boldsymbol{r}$ で質点に及ぶ力，m は質点の質量である．ニュートン方程式の解 $\boldsymbol{r}(t)$ は質点の初速度 $\dot{\boldsymbol{r}}(0)$ と初めの位置 $\boldsymbol{r}(0)$（これらを初期条件という），および，質点に働く力が与えられれば一意に決まる．従って，古典力学では，粒子に働く力が与えられている場合には，ある時刻においてすべての粒子の位置と速度を与えれば，それ以後の系の振舞いを完全に予言できる．フランスの数学者ラプラスはこの情況を次のように述べた．

> もしもある瞬間における全ての物質の力学的状態と力を知ることができ，かつ，もしもそれらのデータを解析できるだけの能力を有する知性が存在するとすれば，この知性にとっては，不確実なことは何もなくなり，その目には未来も（過去同様に）全て見えているであろう（ラプラス『確率の解析的理論』1812 年）．

そのような万能な「知性」は，**ラプラスの悪魔**と呼ばれている．このように古典論的世界においては，過去と未来が完全に 1 対 1 で結びついており，「悪魔」にとってはすべてがお見通しであり，言わば力学が神にとって代わる．実際，ラプラスはナポレオンに「私には神という仮説は不要なのです」と言ったそうである．また，時間はそのように決定論的に変化する事象の系列を順序づけるパラメータに過ぎない．しかし，このような決定論的世界観は量子論の登場とともに破綻した．

ニュートン力学を用いることによって，ケプラーの法則をはじめとする天体の運動から地上の落下法則など様々な現象が説明された．このような，ニュートン力学の著しい成功から，すべての現象が力学で説明できるという力学的世界観が形成された．実際，上に述べたようにニュートンは光さえも粒子からなるという光の粒子説を唱えた．しかし，光の粒子説は回折や干渉効果など光の持つ波動的性質をうまく説明できない．また，ニュートンの万有引力の法則は力が遠隔作用として伝わ

ることを仮定しているが，これは当時ですら強い批判を受けた．これらは，**力学的世界観**の限界を示唆しているといえよう．

3. マクスウェル理論

波動理論の代表例であるマクスウェル理論は，電磁現象と光学現象を統一的に理解することを可能にした．マクスウェル理論は，電磁波が光速度で伝搬することを示し，電磁波と質点である電子との相互作用を記述し，ローレンツ変換に対して不変である．アインシュタインはこのローレンツ不変性を荷電粒子以外の力学系に対しても要請することによって特殊相対性理論を確立し，時空の概念に革命をもたらした．このように，マクスウェル理論は特殊相対性理論を自然な形で内包していただけでなく，以下に述べるように近接作用と場の概念の確立にも大きな役割を果たした．

3.1 近接作用

ニュートンは質点が存在する空の時空間―**絶対時空**―を考えた．ここで，「絶対」とは，時間や空間座標がどのような運動状態にある観測者から見ても同じ値に取ることができるという意味である．そのような空っぽな絶対時空に存在する質点の間に働く万有引力

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{2}$$

は遠隔作用であると考えられた．ここで，$G = 6.67\times10^{-11}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$ は万有引力定数である．**遠隔作用**という考え方はニュートンの当時はイギリス以外のヨーロッパ大陸では「オカルト的」と考えられていたそうだが，あまりに多くの現象を説明したために次第に受け入れられていった．

これに対して，プラスとマイナスに帯電した電荷の間に働く力は，電荷の周りの真空に電気的な歪みが生じ，その歪みが伝搬することにより電気的な作用が伝わるという近接作用の考えに基づき解釈された．例えば，座布団にボールを置くとその周辺がへこみ，へこんだほうに他のボールが吸い寄せられる情況を想像しよう．座布団が真空であり，へこみが真空の歪みと解釈される．あるいは，水に1円玉を浮かべる情況を想像してもよい．水に浮いた2つの1円玉を近づけると，それらは互いに引き寄せられるが，その起源は媒質である水であると考えられる．この場合は水が真空の役割を果たす．このように，電磁現象を記述する空間は空っぽではなく電磁力を媒介する場―電磁場―で満たされていて，力はそのような場を連続的に伝わっていくと考えることができる．このような見方が**近接作用**の考え方である．

3.2 場の概念

遠隔作用の立場から考えると，電荷を振動させても真空は空のままで何も変化しないはずである．他方，近接作用の立場に立つと，浮かべた1円玉を振動させると水の表面が波立ちそれが伝搬するように，電荷を振動させると電気的な歪みが生じてそれが空間を伝搬するものと考えられる．これが電磁波である．アンテナから電波が出るのは，アンテナ中を電流が振動し，それに誘起された電気的な場の歪みが伝搬して電波となるからである．このように，電磁現象にとっては真空は空っぽの空間ではなく，電磁波を伝搬させる媒質としての役割を果たす．空気がなければ音波は伝搬しないが，電磁波は真空中をも伝搬するのである．この意味で，空間のあらゆる場所に電界や磁界が存在する．そのことを強調するために電磁「場」という言葉を用いる．

電荷が存在するとき空間の各点に電場が生じる．電場は方向を持っているので3成分のベクトル量で

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(x,y,z,t)\\&= (E_x(x,y,z,t), E_y(x,y,z,t), E_z(x,y,z,t))\end{aligned} \tag{3}$$

と書かれる．磁場 $\boldsymbol{B}$ も同様である．質点の運動の場合は，(x,y,z) は質点の位置という物理量であり，時間 t のみがパラメーターであったが，電磁場の場合は，電場や磁場が物理量であり，時間のみならず x,y,z も空間の場所を表すパラメーターとなる．電場は英語では electric field と書かれるが，これは空間と時間のあらゆる点で方向と大き

さを持ったベクトル量が定義されており，それがあたかも草が生い茂った野原 (field) を連想させるからであろう．座標と時間は連続的な値をとるので，場の量はあらゆる時空点において定義された連続無限の自由度を持った物理量であるといえよう．

4. 量子力学

粒子と思われていた電子が干渉効果を示し，波であると思われていた光が光電効果のような粒子性を示すことが実証され，粒子性と波動性が相いれない概念ではなく，むしろ，同じものの異なる側面を表していることが次第に明らかになった．量子論はこれらを統一的に理解する理論的枠組みとして登場した．ここではその最も簡単なニュートン力学の量子論への拡張について述べる．ここでは述べないが，マクスウェル理論は相対論的側面と場の理論としての側面をあわせもっているために，これを量子化するためには相対論的な場の量子論が必要になる．

4.1 粒子–波動二重性

量子論の本質は，アインシュタイン–ド・ブロイの関係式を通じて粒子性と波動性を統一することである．ここで，粒子性とは質量，位置，運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー E などによって特徴づけられる性質をいう．他方，波動性は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ や周波数 ω などによって特徴づけられる性質をいう．粒子性を特徴づける物理量と波動性を特徴づけるこれらの物理量の間には古典論では関係は存在せず，両者は別々の法則によって支配されてきた．

アインシュタインは光量子仮説によって周波数 ω を持った光のエネルギーは $\hbar\omega$ を単位とするととびとびの値を持つことを指摘した．ここで，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った普遍定数である．一方，ド・ブロイは運動量 $\boldsymbol{p}$ を持った物質があたかも波数ベクトルが $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}/\hbar$ を持った物質の波—物質波—として振る舞うことを主張した．これは，粒子を特徴づける物理量の組 $(\boldsymbol{p},E)$ と波を特徴づける物理量の組 $(\boldsymbol{k},\omega)$ が同じ情報を持つということを意味している．すなわち，

$$\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k},\quad E=\hbar\omega. \tag{4}$$

これらの関係式は，**アインシュタイン–ド・ブロイの関係式**と呼ばれる．アインシュタイン–ド・ブロイの関係式により，粒子の性質がわかれば対応する波の性質もわかり，その逆もまたしかりである．これが**粒子–波動二重性**の本質である．

アインシュタイン–ド・ブロイの関係式を用いて，波に関する情報から粒子に関する情報をどのように取り出すかをみるために，1 次元平面波を考えよう．

$$\Psi(x,t)=e^{i(kx-\omega t)}. \tag{5}$$

粒子の運動量 p とエネルギー E は (4) より Ψ を位置と時間でそれぞれ微分することによって取り出すことができる．すなわち，

$$\begin{aligned} p\Psi &= \hbar k\Psi=\hbar k e^{i(kx-\omega t)} \\ &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}e^{i(kx-\omega t)}=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi, \qquad (6)\\ E\Psi &= \hbar\omega\Psi=\hbar\omega e^{i(kx-\omega t)} \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{i(kx-\omega t)}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi. \qquad (7)\end{aligned}$$

このように，粒子の性質を波の描像で記述しようとすると，運動量やエネルギーといった物理量が微分演算子で表される．これらの量子力学における物理量を，古典力学における物理量と区別するために記号（ˆ）をつけて表す．

$$\hat{p}=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x},\quad \hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{8}$$

古典力学は，このような置き換えを行うことによって量子力学へと移行できる．これを**量子化の手続**という．例えば，ポテンシャル $V(x)$ の中にある質量 m の粒子のエネルギーは

$$E=\frac{p^2}{2m}+V(x) \tag{9}$$

で与えられるが，これに量子化の手続を適用するとシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\Psi(x,t) \tag{10}$$

が得られる．ここで $\Psi(x,t)$ は波動関数と呼ばれる．このように，量子化の規則はアインシュタイ

ン−ド・ブロイの関係式が基礎であり，不確定性関係もそこから導かれる．

4.2 波動関数の解釈

シュレーディンガー方程式 (10) を適当な初期条件の下で解くと，波動関数が一意に得られる．この意味で，量子力学の基礎方程式は決定論的である．それでは波動関数の物理的意味は何であろうか．シュレーディンガーは，(例えば電子の) 波動関数 Ψ を雲のように広がった電子の波を記述する「実在の波」と考えたようである．実在の波とは流体と同様の連続体の波のことを意味し，任意に分割することができる．ところが，このような解釈は電子などの素粒子が分割できないという実験事実と矛盾する．そこで，ボルンは Ψ を確率の波—これを確率振幅と呼ぶ—と考え，その絶対値の自乗 $|\Psi(x,t)|^2$ が電子の存在確率密度を与えると解釈した．これを**波動関数の確率解釈**という．この解釈は，素粒子が分割できず，かつ，個々の観測結果が確率的にランダムに現れるという観測事実をうまく説明する．

基礎方程式であるシュレーディンガー方程式が確率振幅しか与えないという事実は，個々の観測結果を確実に予言することが原理的に不可能であることを意味する．アインシュタインは，この事実のゆえに量子力学を現存する最良の理論とは認めつつも，最終的な理論として受け入れることを終生拒否した．彼の有名な「神はさいころを振らない」という言葉はこの立場を端的に言い表している．これに対して，ボーアをはじめとするコペンハーゲン学派の人々は，量子論が我々に突きつける確率的な考えをさらにおしすすめて，「測定が行われるまでは実在と言うものを考えてはいけない，確率振幅という情報のみが存在する」と主張した．これを，**コペンハーゲン解釈**と言う．

シュレーディンガー方程式からは確率分布に関する情報しか得られないにもかかわらず，測定器が出力する測定結果は毎回ランダムではあるが (重ね合わせではない決まった) 値を出力する．このようにコペンハーゲン解釈は，波束の収縮を起こさせ測定値を確定させる役割を果たす古典論的性格

をもった古典的測定器と呼ばれる装置の存在を前提としている．ところが，量子力学の枠内ではそのような確定した値を出力する古典的測定器という概念を導出することができておらず，それどころか，測定される系と測定器ひいては観測者の間に，波束の収縮がここで起こるという明確な境界線を引くことができない．これは，**フォン・ノイマンの鎖**（von Neumann's chain）と呼ばれる．つきつめて考えると，我々の意識が測定結果を認識したときに波束の収縮が起こるのだという極論にまで行き着く．古典力学の破綻を克服した量子力学はその予言を解釈するというまさに最終段階において古典的な性格を持った測定器という概念を導入しなければならないというアキレス腱をもっている．とはいえ，決定論的なシュレーディンガー方程式と波動関数の確率解釈によって粒子性と波動性を統一的に記述する首尾一貫した理論体系が得られた．

4.3 統一の代償と新しい可能性

量子論は粒子性と波動性を統一したが，次の 3 つの代償を払った．

- 未来が確率的にしか予言できない（非決定論的世界，不確定性原理）．
- 同じ粒子は原理的に区別できない．
- 非局所性．

量子力学の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式が確率振幅しか与えないという事実は，未来が原理的にも確率的にしか予言できないということを意味している．これはラプラスの悪魔が量子論の世界では原理的に存在できないことを意味している．しかし，まさにこの性質を利用して盗聴が不可能な量子暗号が考案された．また，同じ種類の原子や分子や素粒子が原理的に区別できないという量子論特有の性質がある．古典的な粒子は，どんなに精密に作ったとしても必ず識別することができる．しかし，原子・分子，あるいは素粒子のレベルではこれが原理的に不可能になる．実は，これが超伝導や超流動の発現を可能にする原理となっている．量子力学が予言する 3 番目の性質として，非局所性がある．これは，2 個の粒子がひとたび相互作用をすると，その後相互作用をしなくなった後までも，また両者が空間的に離れた後にまで相関が残り，一方の粒子の状態を測定するとそれが他方の粒子に影響を与えるという効果を生む．そのような**非局所的相関**は，アインシュタインが不気味な遠隔作用（eerie action at a distance）と呼んだもので，近年の量子光学実験によってその存在が実証された．しかし，そのような非局所相関が量子テレポーテーションや量子コンピューターのアルゴリズムを作るためのデバイス原理として利用されている．詳しくは文献 1) を参照されたい．

5. 終わりに

粒子性と波動性は物質の 2 大存在形態である．それらが実は同じ物質の 2 つの側面を表しているということが量子力学によって示された．一般に量子は測定しないときには波動性を表し，測定する際にその粒子性を発現する．それゆえ，量子は 2 重スリットを同時に通過することができ，それにもかかわらず，どちらのスリットを実際に通過したのかを確かめようとして測定すると，粒子性が現れて干渉縞は消えてしまう．測定により波の性質が消えることは波束の収縮と呼ばれるが，ここで言う波は確率振幅としての波なので，収縮するのは物質としての波ではなくいわば情報を運ぶ波である．実際，部分的な測定をすると可干渉性も部分的に収縮することが知られている．ここでは測定は情報の読み出しと読み換えてもよい．系が確率振幅として持っていた情報が測定行為によって観測者に移動するその度合いによって確率振幅の波は収縮し，物質の性質が粒子性として現れるのである．

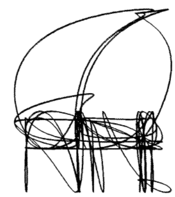
参考文献

1) 上田正仁『現代量子物理学—基礎と応用』（培風館，2004）．

（うえだ・まさひと，東京大学大学院理学系研究科）

特集／光と物理学

光速度測定にみる物理学の発展史



鳥居　寛之

1. はじめに

物理学が観測に立脚した自然科学の典型となる学問であるからには，物理量を測定するという行為が単に実験技術の発達に関わっているだけでなく，基礎物理学の発展を促す原動力となったとしても何ら不思議はない[1)]．そのお手本とでもいうべき歴史話を，光速の測定に見ることができる[2)]．物理学の基礎定数の中でも，古くから様々な測定が試みられ，科学史の檜舞台に登場し続けた物理量，光速．時代とともにいかにその測定精度が向上し，遂には定義値として採用されるに至ったのか，探っていくことにしよう．

2. 近代科学の幕開け

2.1 ガリレオ・ガリレイの試み

アリストテレス（'Αριστοτέλησ, B.C. 384–B.C. 322）をはじめ，論考や思弁によって，**フィロソフィア**（φιλοσοφία）と呼ばれた学問を語った古代の多くの哲学者たちは，光の速さが無限大であると信じていた．時代は下ってケプラー（Johannes Kepler, 1571–1630）やデカルト（René Descartes, 1596–1650）に至っても同様であった．この通説を疑い，光の速さが有限であると考えて初めて実験を試みたのがガリレオ（Galileo Galilei, 1564–1642）であった．弱冠 19 歳にして振り子の等時性を発見し，続いて物体の落下運動が等加速度運動であることを突き止めたガリレオは，実験という手段を通して学問研究を行い，近代自然科学すなわち**サイエンス**（scientia, science）の礎を築いた一人である．その実験は著書『新科学対話』のなかに記されている[3)]．

「ランプを持った二人の人が向かい合って立ち，はじめはランプの前に手をかざして光を遮っておく．一人が覆いを取り除いた後，その光を見たもう一人は素早く自分も覆いを取り払うという実験をする．これを近距離と遠距離で行って，光の見え隠れが同じテンポで行われているかどうかを注意深く見分けようというものであった．」

しかし，1 マイル足らずの距離で行ったこの実験では，相手の光の現れるのが同時であったかどうかを決めることができず，同時的でないとしても光の速さは途方もなく速い，という結論が得られただけであった．

2.2 天文観測：初めての光速度測定

実際に光の速さを初めて導いたのはデンマーク生まれのレーマー（Ole Christensen Rømer, 1644–1710）である．木星を回る衛星イオは，42 時間半の周期で木星の影に入ったり出たりするが，その周期から予測される時刻と，実際の観測時刻との差が，季節に応じて変動することが当時天文学者の間で問題となっていた．パリ天文台で天体観測を続けたレーマーは，綿密なデータと計算の結果から，これは光の速さが有限であるからではないかと考えた．つまり，地球が太陽を挟んで木星から反対側の遠い距離にあるときほど，木星からの光が地球に届くのに余計に時間がかかり，地上での観測時刻が遅れるという考えである．実際に観測された 22 分の遅れから，1676 年に地球の公転速度と光の速度の比を導いた．彼の結果をもとに現代の単位に焼き直すと 2.14×10^8 m/s という値になる．初めて光速を実証的に測定し，おおよそ正しい値を導いた価値は大きい．しかし，光速が有限であるとする彼の説は，当時はまだあまり受け入れられなかった．

2.3 天文観測：光行差の観測

恒星から届く光の方向が季節によって変化する年周視差の観測をめざしていた英国のブラッドレー（James

Bradley, 1693–1762）は，予想に反して大きな視差を観測した．これは**年周光行差**の発見であった．年周光行差とは，有限速度の光速度と地球の公転速度が合成されて，光の見かけの向きが季節に応じて変化する現象である．例えば，雨が垂直に降っている中を全速力で走っていれば，雨は斜め前から吹き付けているように観測されるが，これと同じことが光でも言えるということである．ブラッドレーはこの成果を 1729 年に発表し，「光は，太陽と地球の間を 8 分 12 秒で移動または伝播することになる」と述べている．この結果から，光の速さとして 3.01×10^8 m/s の値が得られる．光行差の観測は，地球が太陽の周りを回るという**地動説**の証拠にもなった．

3. 光学・工学的手法による光速度測定

3.1 回転歯車

それからさらに 1 世紀以上経った 1849 年，地上で初めての光速測定に成功したのは，フランスのフィゾー（Armand Hippolyte Louis Fizeau, 1819–1896）であった．優れた光学者であったフィゾーは，**回転歯車**という画期的な装置を使った実験を考案した（図 1）．レンズで集光した光が歯車の歯と歯の間の谷の隙間を通るようにし，通過した光が 8.6 km 先に置かれた鏡で反射してまた元の隙間を通るように調整する．次に歯車を速く回転させると，光が往復する短い時間の間にも歯車が少し進み，戻ってきたところで歯車の歯に当たって通過できなくなる．更に歯車の回転数を上げていくと，戻り光はちょうど次の歯の谷間を通過することができるようになるであろう．フィゾーは歯数 720 枚の歯車を用いて，回転速度が毎秒 12.6 回転のとき，

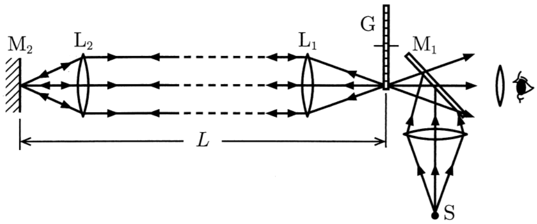


図 1　フィゾーの回転歯車．光源 S からの光をハーフミラー M_1 を介して歯車 G の歯の位置に集光させる．歯の谷を通過した光は，レンズ L_1, L_2 を経て反射鏡 M_2 で折り返して戻るが，その間に回転した歯車で遮られたり通過したりする（文献 2), p.69 より引用）．

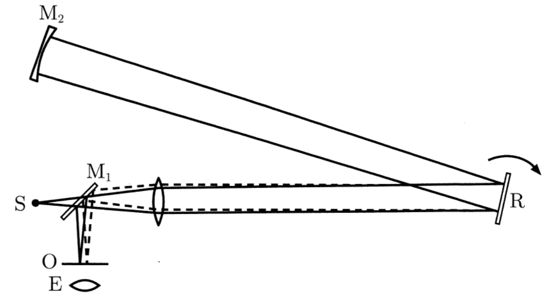


図 2　フーコーの回転鏡．光源 S からの光を回転鏡 R で反射させると，ちょうど凹面反射鏡 M_2 の方向に向った光は，折り返し R に戻ってくる．その間の R の回転により，戻り光は点線のように僅かな角度だけずれ，ハーフミラー M_1 で反射させた観測面 O における光スポットの位置のずれとして接眼鏡 E で観測できる（文献 2), p.71 より引用）．

戻ってきた光が最も暗くなることを見いだし，光の速さとして，3.13×10^8 m/s を得た．

3.2 回転鏡

続いて光の速度を測定したのは，やはりフランスのフーコー（Jean Bernard Léon Foucault, 1819–1868）である[*1]．フィゾーが回転歯車を用いたのに対し，フーコーは**回転**する**鏡**を使った実験を考案した（図 2）．装置は光路を含めて全長わずか 20 m とコンパクトである．光源には太陽光をスリットで切ったものを利用し，この光を高速で回転する鏡で反射する．そのうち都合良く凹面鏡の置かれた方向に向かった光がその凹面鏡で反射され，再び回転鏡に戻ってくるというしかけである．光が往復して戻ってくる短い時間の間に，鏡はわずかな角度だけ回転しているから，回転鏡でもう一度反射されて戻る光の角度が微妙にずれることになる．すなわち，回転鏡の回転速度に比例して，戻ってきた光のスポット位置のずれが観測される．

彼の装置では鏡の回転には蒸気機関を利用し，回転

*1）　彼はフィゾーの高校時代からの友人だが，正規の科学専門教育を受けたことがなかったため，閉鎖的な科学アカデミーからは疎まれ，学者としてなかなか認めてもらえなかったという[4]．しかし産業革命の世紀の申し子として，手先の器用さと卓越した工学的技術で実験装置を考案し，様々な発明や発見を成し遂げる．一番有名なのは**フーコーの振り子**だろう．振り子を数時間揺らしておくと，やがて北半球では時計回りに回転することを，彼は綿密に計画された実験によって 1851 年に発見する．地球の自転を直接的な方法で示した，この初めての実験結果は，地動説の決定的証拠を広く一般の人々に知らしめて論争に終止符を打つ役割を果たした．また，同じ年に彼はジャイロスコープを発明している．

周波数の測定には音のうなり，もしくは時計の歯車を使った巧妙な手法を用いたという．回転数が 500 Hz のとき 0.7 mm のずれを観測したこの実験により，フーコーが 1862 年に得た光速の値は 2.98×10^8 m/s であった．**測定精度**は 0.2% で求まっている．

4. 光の波動性と粒子性

ところで，古来より光は波か粒子かという論争がなされてきた．17 世紀には，プリズムによる光の分散を発見したニュートン（Isaac NEWTON, 1643–1728, 英国）が，光が直進して回折現象がほとんど観測されないことなどを根拠として，光は**粒子**であろうと述べている．一方でホイヘンス（Christiaan HUYGENS, 1629–1695, オランダ）は，著書『光についての論考』の中で光の**波動**説を打ち立てた．19 世紀に入って，1805 年頃にヤング（Thomas YOUNG, 1773–1829, 英国）は，2 つのスリットに分けられた光を再び重ねると**干渉縞**が見えることを発見し，これで波動説が優位に立ったものの，それでも議論は止まなかった．粒子説との論争に一応の決着をつけたのは，水中での光速度の実験であった．

当時の粒子説では，光の粒子が空気中から水中に入る際，水面に垂直下向きに引力を受けることで垂直方向に加速される結果，屈折が起きると説明された．そうだとすると水中での光の速度は空気中より大きいことになる．一方で波動説では，現在知られているように水中での光速は空気中より小さくなる．フーコーは水中でも光速度を測定して空気中での場合と比較した．その 2 カ月後にはフィゾーが追試を行っている．彼らの測定結果は後者の波動説を支持した．

5. 電磁気学の発展

さて光が波だとすると，いったい何の波なのか．光を伝える媒質として，絶対空間に静止した**エーテル**（ether, aether）という名の仮想的媒質の存在が信じられるようになり，その性質が研究されたが，物体に働く力としてはニュートンに代表される力学しか理解できていなかった時代，エーテルを力学的に解釈する企ては困難を極めた[5]．

この問題に解決を与えることになったのは，電磁気学の発展であった．かつて電気力と磁気力は独立のものと認識され，1785 年にクーロン（Charles Augustin COULOMB, 1736–1806, フランス）が発見した法則には静電場と静磁場が記述されていた．ところが，1820 年にエルステッド（Hans Christian ØRSTED, 1777–1851, デンマーク）によって**電流による磁気作用**が発見され，アンペール（André-Marie AMPÈRE, 1775–1836, フランス）の綿密な実験によって法則としてまとめ上げられた．さらに 1831 年には，ファラデー（Michael FARADAY, 1791–1867, 英国）が**電磁誘導**現象を発見し，磁束の変化によって回路に誘導起電力が生じることが見いだされた．電気と磁気とは密接に関連することが明らかとなり，**電磁気学**として統一されることになったのである．マクスウェル（James Clerk MAXWELL, 1831–1879, 英国）はこれらの実験結果をまとめ上げ，1864 年に電磁理論として数学的に定式化した．現在知られている**マクスウェルの方程式**はヘルツによって整理された以下の 4 つの式である．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{4}$$

ここに，ρ は電荷密度，$\boldsymbol{j}$ は電流密度を表す．

(1) 式は電気に関するクーロンの法則の指数が正確に 2 である（クーロン力が距離 r のぴったり逆 2 乗に比例する）ことの帰結として導かれるガウスの法則に，ガウスの定理を適用して得られる．それをさらに時間的に変化する場合にまで拡張したものである．(2) 式は微分形式におけるファラデーの電磁誘導の法則で，ストークスの定理を援用して得られる．(3) 式は磁気に関するクーロンの法則で，右辺が 0 なのは，磁気単極子が存在しないことを意味している．(4) 式はアンペールの法則を時間的に変動する場合に一般化したものである．右辺の第 2 項は，電荷保存則が成立するようにマクスウェルが理論的に導入した変位電流密度である．この項を導入したことによって，変動する電場が変動する磁場を生み出し，その磁場変動がまた電場を生み出すことで波として伝わっていくという，**電磁波**の存在が予言された（図 3）．

真空において真空中に電荷も電流もない場合を考えると，$\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ である．ここに ε_0 は電気定数または真空の誘電率，μ_0 は磁気定数または真空の透磁率という定数である．一連の場の方程式を変形すると，横波を表す波動方程式が得ら

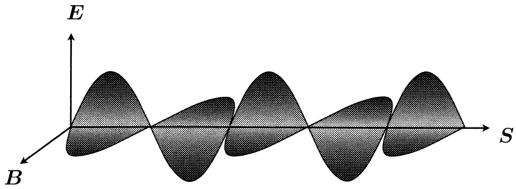


図 3　電磁波は横波．進行方向 $\boldsymbol{S}$ に対し垂直に，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ ができる．

れる[6,7]．

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = 0, \tag{5}$$

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{E}_\parallel = \boldsymbol{B}_\parallel = 0, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}. \tag{8}$$

上の式から電磁波の伝播速度が $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ になることがわかるが，これに当時の実験で得られていた誘電率 ε_0 と透磁率 μ_0 の値を代入すると，光の速度の実験値とよく一致したのである．そこでマクスウェルは光は電磁波であると推定した．電磁波の存在は 1888 年にヘルツ（Heinrich Rudolf Hertz, 1857–1894，ドイツ）が火花放電によって実験的に確認し，その 7 年後には早くも無線通信に応用されている．

6. 特殊相対性理論と量子論

6.1 マイケルソン&モーレーの実験と特殊相対論

さて，この電磁波を伝える媒質として想定されたエーテルの存在を捕えようとする実験がいくつか行われた．なかでも有名なのは，1880 年代に米国のマイケルソン（Albert Abraham Michelson, 1852–1931, 1907 年ノーベル物理学賞受賞）とモーレー（Edward Morley, 1838–1923）によって行われた実験だった．エーテルは宇宙の**絶対空間**に対して静止していると考えられ，一方で地球は太陽の周りをおよそ $v = 30\,\mathrm{km/s}$ の速度で公転運動しているので，地球の運動の方向に平行に光を往復させたときと，垂直に往復させたときではわずかながら往復時間が異なるはずである（図 4）．それぞれの往復時間を $t_\parallel$ および $t_\perp$ とすると，距離 L に対して

$$t_\parallel = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v}, \tag{9}$$

$$t_\perp = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} \tag{10}$$

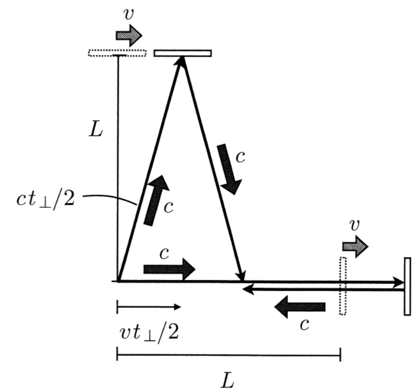


図 4　マイケルソン&モーレーの実験では，地球の運動方向とそれに垂直な方向とを光が往復する時間の予想される微小な差を，光の干渉縞のずれとして観測しようと試みた．実際には縦横それぞれ光を 8 往復させて距離を稼ぎ，また，装置の載った光学台全体を水銀に浮かせてゆっくり回転させることで，衝撃を与えることなく縦と横を交替できるような工夫がなされていた．

が得られ，$\dfrac{t_\parallel - t_\perp}{t_\parallel} \approx \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v}{c}\right)^2 = \mathcal{O}(10^{-8})$ の差が生じると考えられた．

実験では 90 度異なる 2 つの方向に往復した光を干渉させ，その干渉縞を観測することでわずかな時間差を捕えようとしたのだが，期待された干渉縞のずれは全く観測されず，その後の研究でも結果はすべて，静止エーテルの存在に否定的なものであった．すなわち，光の速度は観測者の運動にかかわらず，光の伝播方向によらず常に一定だということになる．この**光速不変の原理**をもとに，1905 年，アインシュタイン（Albert Einstein, 1879–1955, ドイツ／スイス／米国，1921 年ノーベル物理学賞受賞）は**特殊相対性理論**を発表し，時間と空間が絶対不変だとする従来の基本的概念は大きく変革することになったのである．

6.2 光電効果と光量子仮説

ところで，光が電磁波の一種であることを実験的に示したヘルツは，**光電効果**も発見している．これはその後レーナルト（Philipp Eduard Anton von Lenard, 1862–1947, ハンガリー／ドイツ，1905 年ノーベル物理学賞受賞）らの研究によって，ある一定以上の大きな振動数の光を照射すると，電子が表面から飛び出す現象として明らかになった．この光電効果は，やはり 1905 年[*2)]にアインシュタインの**光量子仮説**によって

*2)　この年はアインシュタインの奇跡の年（annus mirabilis）と呼ばれ，ブラウン運動，光量子仮説，特殊相対性理論と主

説明づけられた．プランク定数に周波数を掛けた $h\nu$ のエネルギーを持った光子が表面の電子をたたき出すという考えである．これによって，いったんは波だと結論づけられた光は，粒子としての側面も持つ，ということになり，この粒子と波の二重性の議論はやがて**量子論**の発展に繋がっていく．

7. 光速度の高精度測定

7.1 精度の向上競争

さて，再び光の速度測定に話を戻そう．マイケルソンは光速の測定に生涯をかけた人である．フーコーやフィゾーの実験を発展させながら，1878 年以来，幾度となく実験を繰り返している．回転鏡を多面鏡に替え，空気の屈折率の影響を除くために 1 km 以上ある管の中を真空にして光を通すなど，様々な改良を加えて測定精度を向上した．1935 年に得られた光速度の値は 2.99774×10^8 m/s，相対精度は 2 万分の 1 に達した．

この頃には，光ではなく，電気的方法を使い，静電単位と電磁単位の比を求めることで電磁波の速度 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ を測定する実験も数多く行われた．その後第二次世界大戦後には，進歩した**マイクロ波**技術を駆使して電磁波の速度を求める研究が花盛りとなる．英国のエッセン（Louis ESSEN）らの業績が高い．光よりずっと波長の長いマイクロ波を，空洞共振器で共振させたり，あるいは干渉させたりしてその周波数 ν と波長 λ を同時に測定し，$c = \nu\lambda$ の関係式から電磁波の速度 c を求めるものである．1950 年代の後半には，速度の値として 2.997925×10^8 m/s が国際的に採用されるようになり，精度は実に百万分の 1 に達した．

7.2 秒の定義

1960 年代になって**レーザー**が発明されると，その単色性と指向性，高い輝度のために，たちまち各種計測に応用された．周波数と波長の積から光速を求める実験が，レーザー光を用いても行われるようになる．さて，周波数を決めるには秒の定義が必要となる．それまで地球の自転周期や公転周期を基準に決められていた秒は，実際には振り子式の天文時計によって，また戦後はクオーツ時計を利用して実現されていた．しかしより安定で精度の高い時間標準として，原子や分子の特定のエネルギー準位間の遷移周波数を基準とする気運が高まっていた．アンモニアメーザーや水素メーザーなどは精度や再現性がいまいちだったが，エッセンらによってセシウム原子を用いた安定な**原子時計***3) が開発されたことにより，1967 年に「秒は，セシウム 133 の原子の基底状態の 2 つの超微細構造準位の間の遷移に対応する放射の周期の 9 192 631 770 倍の継続時間である」との定義に変更され，秒の実現精度は 10^{-10}，すなわち百億分の 1 に達した[8)*4)]．

このセシウム原子の遷移で放射される電磁波は，周波数 9 GHz のマイクロ波で，一方，赤外線や可視光の光の周波数はこれよりも 4 桁も高い数百 THz の領域である．これらの周波数を比較するには，途中の周波数を持つレーザーやクライストロンと呼ばれる装置をいくつも使い，これら何段階もの周波数の比較を積み上げていくというとてつもない研究が必要であったが[2, 9)*5)]，1970 年にアメリカ国立標準局のイーブンソン（Kenneth M. EVENSON）らのグループは，メタン安定化ヘリウムネオンレーザーの周波数を 10^{-10} の精度で精確に測定することに成功した．

7.3 メートルの定義

一方で，長さの定義は，1875 年のメートル条約以来，国際メートル原器を基準としていたものが，1960 年には**クリプトンランプ**の発する光の波長を基準とするように再定義されていた．「メートルはクリプトン 86 原子の $2p_{10}$ と $5d_5$ との間の遷移に対応する光の真空の下における波長の 1 650 763.73 倍に等しい長さとする」である．結局のところ，波長の測定は，メー

要な 3 つの論文が立て続けに発表された年だった．このときアインシュタインは 26 歳．スイスの首都ベルンの特許局技師として働いていたことは有名．

*3）セシウム原子ビームを用いた原子時計の構想は，原子ビームを用いた核磁気共鳴を成功させたラビ（Isidor Isaac RABI，米国，1944 年ノーベル物理学賞受賞）によって発表されていた．

*4）最近では原子をレーザー光によって冷却しつつ真空中に磁気光学的にトラップする技術が確立し，こうして得られるマイクロケルビン温度の極低温原子を上方に打ち上げて**原子泉**（atomic fountain）を作ることが可能となった．原子泉でラムゼー法（Norman Foster RAMSEY，米国，1989 年ノーベル物理学賞受賞）によるマイクロ波共鳴を起こさせることにより，秒の実現精度は 10^{-15} に達している．なお，**レーザー冷却**技術により，チュー（Steven CHU，米国），コーエン＝タヌージ（Claude COHEN-TANNOUDJI，フランス），フィリップス（William Daniel PHILLIPS，米国）の 3 名が 1997 年のノーベル物理学賞を受賞している．

*5）最近になって，**光周波数コム**（optical frequency comb）という技術が開発され，任意の光の周波数を直接比較することが可能となった．この業績により，米国のホール（John L. HALL），ドイツのヘンシュ（Theodor W. HÄNSCH）は 2005 年のノーベル物理学賞を受賞した．ホールは 1972 年のイーブンソンらの論文の共著者でもある．

トル標準を与えるクリプトン原子の光の波長と，求めたいレーザー光の波長とを比較することを意味していた．ところが，標準クリプトンランプのスペクトル線の形が非対称であることが分かり，スペクトル線の重心を基準にするのと最大強度のところを基準にするのとで，波長の値がわずかながら異なるため，それ以上の精度で波長を決められないということが問題になってきた．ここに至って，$c = \nu\lambda$ の関係式より光速を測るという実験は，基準となる単位自体の不確かさの問題に直面することになったのである．

7.4 定義値になった光速

そこで，長さの基準として，1 秒間に光が進む距離をもとに定義しなおすのがよいという意見が強まってきた．光速の持つ本質的普遍性が評価されたわけである．すなわち，光源の運動によらず一定であること，伝播方向によらないこと，時間的に不変であること，波長または周波数によらないこと．このように条件によらず一定不変である光の速度を標準に利用することはきわめて合理的なことであった．こうして，1973 年の暫定的合意を経て，1983 年には正式に「メートルは 299 792 458 分の 1 秒の間に光が真空中を伝わる行程の長さ」であると定義されたのである．これをもって，光速度の値は，$c = 299\ 792\ 458\,\mathrm{m/s}$ とし，もはや測定値ではなく**定義値**として位置づけられることとなった．

8. まとめ

さて，ここまで光速度測定の変遷を辿ってきた．ガリレオ，レーマー，ブラッドレー，フィゾー，フーコー，マイケルソン，そしてマイクロ波の測定，レーザーを利用した精密測定によって光速が長さの定義として用いられるに至るまでを述べた（末尾の表 1 にその変遷をまとめた）．測定技術の進歩にともなって様々な研究が進むうち，光そのものの性質に対する理解が深まって，電磁気学や相対論，量子論といった基礎物理学の発展に貢献してきたさまを見てきた．光速は長さ÷時間だが，近年では長さも時間も原子の発する電磁波を基準に定義され，そして現在では光速は**単位の標準**を支える重要な**普遍的物理定数**として評価されているのである．光速を，そして現在では周波数を「測る」という行為は高精度測定の代表格に挙がり，本稿で随時記したように，光科学をとりまく分野は幾度となくノーベル賞の受賞対象になってきた．最近では，現在の時間標準となっているセシウム原子のマイクロ波ではなく，光（可視光）領域の遷移周波数を利用した原子時計の開発でしのぎを削っていて，なかでも**光格子時計**が注目されている[10]．今後 10 年の間に秒の定義は書き換えられると予測され，光をめぐる物語はまだまだ続く．詳細は洪先生のコラムに譲ろう．

参考文献

1) 西條敏美：『物理定数とは何か』講談社ブルーバックス B1144 (1996).
2) 霜田光一：『歴史をかえた物理実験』丸善パリティブックス (1996).
3) ガリレオ・ガリレイ：『新科学対話（上・下）』（今野武雄，日田節次訳）岩波文庫 (1937).
4) Amir D. Aczel: *PENDULUM, Léon Foucault and the Triumph of Science*, Atria Books (2003) / Washington Square Pr (2004).［日本語訳：アミール・D・アクゼル：『フーコーの振り子』（水谷淳訳）早川書房 (2005).］
5) アインシュタイン，インフェルト：『物理学はいかに作られたか（上巻・下巻）』（石原純訳）岩波新書 (1939).
6) 砂川重信：『理論電磁気学（第 2 版）』紀伊國屋書店 (1973).
7) ファインマン，レイトン，サンズ：『ファインマン物理学 III 電磁気学』（宮島龍興訳）岩波書店 (1969).
8) Tony Jones: *SPLITTING THE SECOND: The Story of Atomic Time*, IOP Publishing Ltd (2000).［日本語訳：トニー・ジョーンズ：『原子時間を計る』（松浦俊輔訳）青土社 (2001).］
9) 計量研究所編：『超精密計測がひらく世界』講談社ブルーバックス B1215 (1998).
10) 香取秀俊：「光格子時計の発明と展開」，応用物理 **81**, 656 (2012).

（とりい・ひろゆき，東京大学大学院総合文化研究科）

表 1　光速度の測定値の変遷.

発表年	測定者	方法	測定値（$\times 10^8$ m/s）	
1638	ガリレオ	光の往復時間	無限大または途方もなく速い	
1676	レーマー	木星の衛星の食	2.14	
1729	ブラッドレー	年周光行差	3.01	
1849	フィゾー	回転歯車	3.13	
1857	ウェーバー，コールラウシュ	静電／電磁単位の比	3.107	
1862	フーコー	回転鏡	2.980	± 0.005*
1872	コルニュ	回転歯車	2.985	± 0.009*
1874	コルニュ	回転鏡	3.004	± 0.008*
1878	マイケルソン	回転鏡	3.0014	± 0.0070*
1882	ニューカム	回転鏡	2.9981	± 0.0003*
1907	ローザ，ドルセー	静電／電磁単位の比	2.997 88	± 0.000 30*
1908	ペロタン，プリム	回転歯車	2.9970	± 0.0008*
1926	マイケルソン	多面鏡	2.997 96	± 0.000 04*
1928	カロールス，ミッテルシュテット	カーセル	2.997 78	± 0.000 20*
1935	マイケルソン，ピース，ピアソン	多面鏡	2.997 74	± 0.000 11*
1941	アンダーソン	カーセル	2.997 76	± 0.000 14*
1948	エッセン，ゴルドンスミス	固定長共振器	2.997 92	± 0.000 03*
1949	アスラクソン	レーダー	2.997 924	± 0.000 024*
1950	エッセン	可変長共振器	2.997 925	± 0.000 010*
1950	ハンセン，ボル	可変長共振器	2.997 893	± 0.000 008*
1950	ベルグストランド	ジオディメーター	2.997 931	± 0.000 003*
1954	フルーム	マイクロ波干渉計	2.997 9275	± 0.000 0030
1955	フローマン	電波干渉計	2.997 951	± 0.000 015
1955	ランク他	分子スペクトル	2.997 919	± 0.000 022
1969	カロールス	超音波変調	2.997 9247	± 0.000 0015
1972	イーブンソン他	3.39 μm CH_4	2.997 9267	± 0.000 0020
1972	ベイ他	633 nm He-Ne	2.997 924 62	± 0.000 000 18
1972	イーブンソン，バーガー，ホール他	3.39 μm CH_4	2.997 924 562§	± 0.000 000 011
	(同上)	(同上)	2.997 924 587§§	± 0.000 000 011
1973	国際度量衡 CCDM† 諮問委員会	勧告	2.997 924 58	± 0.000 000 011
1983	国際度量衡総会	定義値	2.997 924 58	(exact)

（注）この表の作成にあたっては，文献 1, 2) やその他の文献等を参考にし，主要なものを載せた.

* 表中で，1951 年までの値について，測定誤差は確率誤差（信頼係数 50%）で与えてある．それ以降の値については，統計的誤差と系統的誤差を含む標準偏差（信頼係数 68%）の値を示した.

§ クリプトン線の重心を波長標準の基準に取った値　§§ クリプトン線のピークを波長標準の基準に取った値

† CCDM: 国際度量衡委員会の，メートルの定義に関する諮問委員会のこと.

虹の七色

幾何光学，媒質の応答

久 我　隆 弘

1. はじめに

映画『オズの魔法使』(The Wizard of Oz) の挿入歌，『虹の彼方に』(Over the Rainbow) にも歌われているように，雨上がりの空に架かる虹 (図 1) は，地上の些末な物事から心を解き放ち，遥か彼方の“夢の世界”への想いをかきたてる．ところが，このようなロマンティックな感傷とは無縁な無粋な物理屋は，虹を一つの自然現象として「科学的」に分析し，虹も虹の向こうの世界もこちらと同じであることを実証してしまう．そう，虹は空中に浮かんでいる小さな水滴による**光の屈折**に起因し，七色に分かれるのは屈折率が色により異なるといった**媒質の分散**によって説明できる．本稿では，幾何光学による光の屈折，および外場に対する媒質の応答を考えることで，虹の七色について解説しよう．

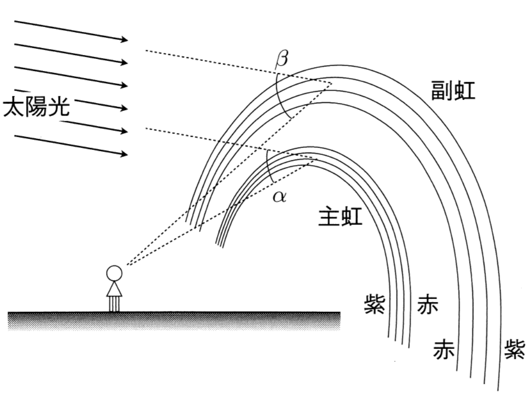


図 1　虹．

2. 幾何光学による光の屈折の説明

幾何光学の歴史は紀元前 4 世紀エウクレイデス (ユークリッド) による「光の直進の原理」に端を発する．言わずと知れたユークリッド幾何学の基礎を築いた原理だ．そして**フェルマーの原理** (1657)，「光は所要時間 (光路長) の最も短い道筋を進む」により光の屈折についての説明も可能となった．その後 1830 年代にハミルトンは変分原理によりフェルマーの原理を一般化し，「光は所要時間が極値 (停留値) となる道筋を進む」とした．

この原理を数式で表すと，

$$\delta \int_{t_{\mathrm{P}}}^{t_{\mathrm{Q}}} dt = 0 \tag{1}$$

となる．したがって，媒質中の光速度を $v(\boldsymbol{r})$，屈折率を $n(\boldsymbol{r})$ とすると，図 2 (1) で点 P から点 Q まで光がたどる道筋は，

$$\delta \int_{t_{\mathrm{P}}}^{t_{\mathrm{Q}}} dt = \delta \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \frac{1}{v(\boldsymbol{r})}\, ds = \delta \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \frac{n(\boldsymbol{r})}{c}\, ds = 0 \tag{2}$$

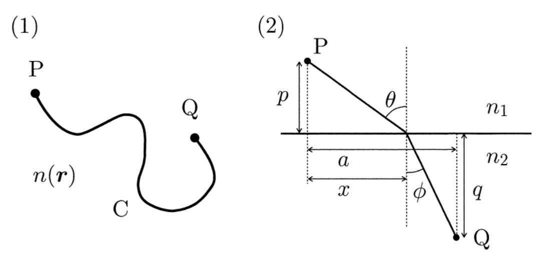


図 2　光のたどる道筋．

を満たすような道筋Cとなる．なお，$\int ds$ は経路に沿った線積分，c は真空中の光速度を表す．

いまここで，図2(2)のような，屈折率が n_1 と n_2 である2つの媒質が平面を境界にして接している場合を考えよう．同じ媒質内では，光は直進するので，経路に沿った線積分は

$$\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \frac{1}{v(\boldsymbol{r})} ds = \frac{\sqrt{x^2+p^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2+q^2}}{v_2}$$
$$= \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{x^2+p^2}+n_2\sqrt{(a-x)^2+q^2}\right) \tag{3}$$

と書け，これの変分，ここでは x での微分がゼロになる条件は，

$$n_1\frac{x}{\sqrt{x^2+p^2}} + n_2\frac{x-a}{\sqrt{(a-x)^2+q^2}}$$
$$= n_1\sin\theta - n_2\sin\phi = 0 \tag{4}$$

となる．つまり**スネルの法則（屈折の法則）**

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{n_2}{n_1} \tag{5}$$

を幾何光学的に導けたことになる．

3. 水滴による光の屈折，反射

図1に描いた**主虹**を簡単にモデル化すると，図3にあるように，『太陽光が大気中に浮かんでいる球状の水滴によって屈折→反射→屈折され，観測者の目に届く』となる．すると，幾何学的な簡単な考察から，入射光（太陽光）と射出光の成す角度 $\alpha(\theta)$ は，

$$\alpha(\theta) = 4\phi - 2\theta \tag{6}$$

となることが分かる．しかし，ただこれだけでは，図1のように，虹がある特定の方向に見えることを説明できない．水滴には均等に太陽光があたるので，射出する光の方向も様々だからだ．

この疑問に対する一番簡単で直観的な説明は，**光線追跡法**（Ray Tracing）と呼ばれる方法である（図4）．図3において x 軸と平行に入射した太陽光が，x 軸からの距離の違いによりどのように水滴で屈折→反射→屈折されるのかを追跡する方法だ．図4に示すように，x 軸に近い（θ の小さい）ところから次第に遠ざけていくと，最初 $\alpha(\theta)$ は増大するが，あるところから減少に転じることが分かる．この転回する方向には，他よりも多くの光線が集まるので，観測者のもとに強い光が届き観測されやすいということになる．

具体的に計算してみると，$\alpha(\theta)$ が極値を取る条件，

$$\frac{d\alpha(\theta)}{d\theta} = 4\frac{d\phi}{d\theta} - 2 = 0 \tag{7}$$

と，(5)式の微分

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{n_1}{n_2}\frac{\cos\theta}{\cos\phi} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{(n_2/n_1)^2-\sin^2\theta}} \tag{8}$$

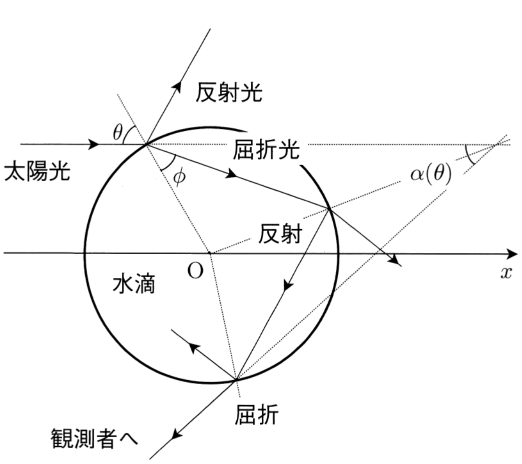


図3　水滴による光の屈折，反射．

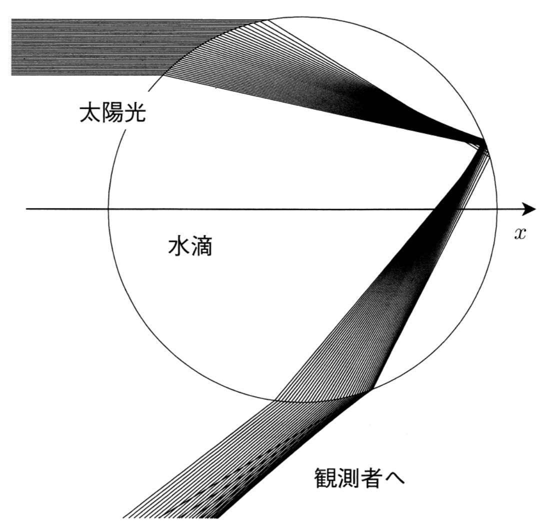


図4　光線追跡法．

より，$\alpha(\theta)$ は

$$\theta_\alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{(n_2/n_1)^2-1}{3}}\right) \tag{9}$$

のとき最大となることが分かる．いま，空気と水の屈折率の比として，$n_2/n_1 = 1.33$ を用いると，もっとも光が強くなる方向は，$\theta_\alpha = 59.6°$ のときで $\alpha(\theta_\alpha) = 42.5°$ となる．

副虹は水滴中で2回反射してから観測者の元に届く虹であり（図5），主虹のときと同様にして考えると，太陽光と射出光の角度 $\beta(\theta)$ は

$$\beta(\theta) = \pi - 6\phi + 2\theta \tag{10}$$

と書け，

$$\theta_\beta = \arccos\left(\sqrt{\frac{(n_2/n_1)^2-1}{8}}\right) \tag{11}$$

の方向の射出光が最大となる．やはり同様に屈折率の比を1.33とすると，光が最も強くなるのは $\theta_\beta = 71.9°$ のときで $\beta(\theta_\beta) = 50.1°$ となる．

このように虹を生み出す水滴と空気との境界面での反射率は，幾何光学では求めることができず，厳密な議論をするには光の偏光方向までも考慮に入れたベクトル波動光学（マクスウェル方程式）を用いることになる．結果だけを示すと，主虹からの光は，太陽–水滴–観測者を含む面（入射面）に垂直な偏光（s偏光），もっと直観的には虹の円弧に平行な偏光が強度の95% 程度を占める偏った光となる．また副虹の明るさは，入射角の違いと水滴内で1回余計に反射している点だけを考慮しても，主虹の3分の1程度となる．

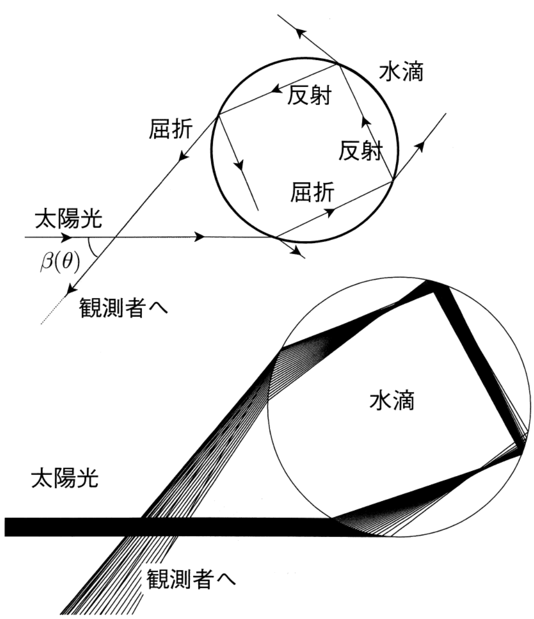


図5　副虹．

以上のように，球状の水滴は平行光をある特定の方向に強く散乱することがわかった．そしてその方向は，(9), (11) 式から理解できるように，屈折率に依存する．つまり，水滴は白色光を色（周波数）ごとに分離するプリズムと同じ働きをする．虹は，大気中に広く散りばめられたプリズム（水滴）が分離した色の光を一カ所で観測したものなので，色ごとに仰角が違って見えるのだ．

ではなぜ，水の屈折率が周波数によって異なる（**分散**という）のだろうか．この分散性も幾何光学では説明できず，外場に対する媒質（誘電体）の応答を考える必要がある．次節からは，この外場応答を簡単に紹介し，屈折率の周波数依存性について考えていこう．

4. 外場に対する媒質（誘電体）の応答

水滴のような媒質（誘電体）に電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ が加わった際の応答（分極）$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ は，一般に，

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0 \int d\boldsymbol{r}' \int_{-\infty}^{t} dt' f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t') \tag{12}$$

と表現できる．ここで ε_0 は電気定数（真空の誘電率），$f(\boldsymbol{r},t)$ は**応答関数**であり一般にはテンソル量である．

(12) 式の空間積分は，注目している場所 $\boldsymbol{r}$ とは異なる場所 $\boldsymbol{r}'$ における電場に応答すること（空間分散性）までを取り入れた結果だが，通常，物理学では局所相互作用のみを考え，このような長距離相互作用はないと考える．したがってこの積分は省略できる．また水のような**均質**な媒質では，

応答関数 $f(\boldsymbol{r},t)$ は $\boldsymbol{r}$ に依存しない．さらに媒質が**等方的**であれば $f(\boldsymbol{r},t)$ はスカラー量となり，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) /\!/ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ となるのでベクトルを成分ごとに分けて考えて良い．つまり，電場や分極はスカラー関数として扱って良い．さらに今後の議論に空間依存性はしばらく出てこないので引数の $\boldsymbol{r}$ は省略して表記すると，結局 (12) 式は，

$$P(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} f(t-t')E(t')dt' \qquad (13)$$

となる．

(13) 式は，分極 $P(t)$ は "現在" の電場 $E(t)$ のみに "瞬時" 応答するのではなく，"過去の記憶" $E(t')(t'<t)$ をある重み $f(t-t')$ で足し合わせた形で応答することを意味している（**記憶（memory）効果**）．このことから，$f(t)$ は**緩和関数**とも呼ばれる．また，(13) 式のように分極 $P(t)$ が表されるということは，媒質の応答は電場 $E(t)$ の周波数によって異なることを意味している（次節で解説）．

一方，媒質中の電気変位（電束密度）$D(t)$ は，電場 $E(t)$ と分極 $P(t)$ を用いて

$$D(t) = \varepsilon_0 E(t) + P(t) \equiv \varepsilon E(t) \qquad (14)$$

と表すことができる．ここで ε は媒質の誘電率であり，ε を使って媒質の屈折率 n は，

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \qquad (15)$$

と表現される．つまり誘電体の屈折率の周波数依存性は，応答の周波数依存性を調べることで理解される．

以下では，フーリエ級数展開（周波数分解）を行うことで応答の周波数依存性を吟味し，誘電体（水）の屈折率が光の周波数に依存する機構（分散性）を説明しよう．

5. 周波数分解と線形応答

電場 $E(t)$，分極 $P(t)$ をフーリエ級数展開（周波数分解）すると，

$$E(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \qquad (16)$$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \wp(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad (17)$$

となる．(17) 式を逆フーリエ変換して (13) 式を使うと，

$$\begin{aligned}\wp(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{i\omega t}dt \\ &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{t} dt' f(t-t')E(t')\end{aligned} \qquad (18)$$

が得られる．

ここで，応答関数 $f(t)$ が電場 $E(t)$ には依存しないという**線形応答**だけを考えることにする．すると $f(t)$ は，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad (19)$$

と，電場 $E(t)$ とは無関係にフーリエ級数展開でき，さらに (16), (19) 式を (18) 式に代入して積分を実行すると，最終的に

$$\wp(\omega) = \varepsilon_0\chi(\omega)\mathcal{E}(\omega) \qquad (20)$$

が得られる．

(20) 式は，媒質に誘起される分極の角周波数 ω の成分 $\wp(\omega)$ は，電場の同じ角周波数成分 $\mathcal{E}(\omega)$ に比例することを示しており，これは線形応答を考えているので当然の帰結である．この定数 $\chi(\omega)$ は**複素電気感受率**と呼ばれる．なお，$E(t)$, $P(t)$, $f(t)$ は実数なので，$\mathcal{E}(\omega)$, $\wp(\omega)$, $\chi(\omega)$ は複素数となる．

いま，(20) 式で $\chi(\omega)=\chi_0$，つまり複素電気感受率は角周波数に依存しないとしてみよう．すると (19) 式は，

$$f(t) = \frac{\chi_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}d\omega = \chi_0\delta(t) \qquad (21)$$

となり，(13) 式より分極は $P(t)=\varepsilon_0\chi_0E(t)$ となる．これは，分極は電場に "瞬時" 応答することを示している．しかし現実的には瞬時に応答はできない．したがって，複素電気感受率は角周波

数に依存しなければならない．

ここで，(16) 式を (13) 式に代入した積分表式と，(20) 式を (17) 式に代入した表式とを比べると，

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{t} f(t-t')e^{i\omega(t-t')}dt' = \int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau \qquad (22)$$

と表されることが分かる．つまり $\chi(\omega)$ は“過去の記憶”（$f(\tau)$, $(\tau > 0)$）を足し合わせた形となっており，“未来からの情報”（$f(\tau), (\tau < 0)$）は含まれない．

6. クラマース・クローニッヒの関係

話がかなり形式的になってしまうが，(22) 式の $\chi(\omega)$ の引数 (ω) も複素数の範囲にまで拡張して，複素平面上の関数 $\chi(z)$ として考えてみよう．また，(19) 式も，図 6 (1) のように複素平面上の積分路，すなわち $t > 0$ のときは下半平面を囲い，$t < 0$ のときは上半平面を囲うような経路を考えて，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\oint \chi(z)e^{-izt}dz \qquad (23)$$

としておく．すると，“未来からの情報”が $\chi(z)$ に含まれないこと（因果律）は，$f(t) = 0$ $(t < 0)$ と書けるので，$\chi(z)$ は複素上半平面で特異点のない正則な関数である必要がある．

いま新しい関数 $\chi(z)/(z-\omega)$（ω：実数）を導入し，図 6 (2) のような経路，すなわち複素上半平面を囲うが，$\chi(z)/(z-\omega)$ の極 $(z = \omega)$ 付近では ω 中心にした微小半径 δ の半円で極を避けて通るような経路で積分すると，

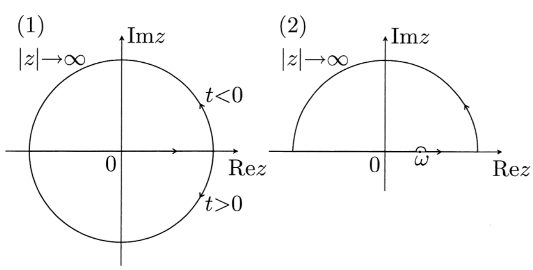


図 6　複素平面上の積分路．

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{\chi(z)}{z-\omega}dz = 0 \qquad (24)$$

となる．そしてこの積分を，経路をいくつかに分割して行なえば，

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi i}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \qquad (25)$$

を得る．ここで $\mathrm{p.v.}\int d\omega'$ はコーシーの主値積分である．

いま，$\chi(\omega)$ を $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ として，実部 $\chi'(\omega)$ と虚部 $\chi''(\omega)$ に分けると，

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi''(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega', \qquad (26)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{-1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi'(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \qquad (27)$$

となる．また，$f(t)$ は実数ということから，(19) 式より $\chi^*(\omega) = \chi(-\omega)$ が要求され，実部 $\chi'(\omega)$ は偶関数，虚部 $\chi''(\omega)$ は奇関数となる．最終的に，

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{0}^{+\infty}\frac{\omega'\chi''(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}d\omega', \qquad (28)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{-2\omega}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{0}^{+\infty}\frac{\chi'(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}d\omega' \qquad (29)$$

が得られる．(28), (29) 式は，応答（複素電気感受率）の実部と虚部は互いに関連しており，独立ではないことを示している．そして，このような関係があるのは因果律が成り立つことに起因している．この関係は**クラマース・クローニッヒの関係**と呼ばれる．

7. 現象としてのクラマース・クローニッヒの関係

ここで，クラマース・クローニッヒの関係はどのような物理現象と結びつくのかを考えてみよう．それには，誘電体中を x 軸方向に伝播する単色平面電磁波

$$E(x,t) = E_0 \exp[i(kx-\omega t)] \qquad (30)$$

を例にすると理解しやすい．ここで k は媒質中の波数である．すると，(30) 式が電磁場の基礎方程式を満たすための必要条件として，

$$k = nk_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\,k_0, \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{c}\right) \tag{31}$$

が導かれる．

いま，(14) 式に (16), (17), (20) 式を代入すると，媒質の誘電率 ε は角周波数 ω の関数となり，

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)) \tag{32}$$

となる．$\varepsilon(\omega)$ は複素数値をとるので，**複素誘電率**と呼ばれる．すると，(15) 式で表される媒質の屈折率も複素数となり，これを $\tilde{n}(\omega)$ と表し**複素屈折率**と呼ぶ．いま，複素屈折率の実部を $n(\omega)$，虚部を $\kappa(\omega)$ と書く．すなわち

$$\begin{aligned}\tilde{n}(\omega) &= \sqrt{1 + \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)} \\ &= n(\omega) + i\kappa(\omega)\end{aligned} \tag{33}$$

とする．また，(31) 式の波数も複素数となるので，これも $\tilde{k}(\omega)$ と表すと，

$$\tilde{k}(\omega) = \tilde{n}(\omega)k_0 = n(\omega)k_0 + i\kappa(\omega)k_0 \tag{34}$$

となる．

(34) 式を (30) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}E(x,t) &= E_0 \exp\left[i(\tilde{k}(\omega)x - \omega t)\right] \\ &= E_0 \exp\left[-k_0\kappa(\omega)x\right]\ \exp\left[ik_0 n(\omega)\left(x - v(\omega)t\right)\right]\end{aligned} \tag{35}$$

が得られる．(35) 式からは，誘電体中を伝播する電磁波の位相速度は $v(\omega) = c/n(\omega)$ であり，伝播にともない波の振幅は $k_0\kappa(\omega)$ の割合で減衰することが分かる．つまり通常使われている意味での媒質の屈折率は $n(\omega)$，複素屈折率の実部であり，虚部 $\kappa(\omega)$ は電磁波の減衰率，すなわち**媒質の吸収率**に関連する量ということになる．

(33) 式を 2 乗して実部と虚部を比較すると，

$$n^2(\omega) - \kappa^2(\omega) = 1 + \chi'(\omega), \tag{36}$$

$$2n(\omega)\kappa(\omega) = \chi''(\omega) \tag{37}$$

が得られる．また，希薄な原子気体中などでは，$|\chi'(\omega)| \ll 1$, $|\chi''(\omega)| \ll 1$ となるので，(33) 式より

$$n(\omega) \simeq 1 + \frac{\chi'(\omega)}{2}, \tag{38}$$

$$\kappa(\omega) \simeq \frac{\chi''(\omega)}{2} \tag{39}$$

と書くことができる．これらより，複素電気感受率の実部 $\chi'(\omega)$ は屈折率と関係し，虚部 $\chi''(\omega)$ は吸収率と関係することがわかる．そしてクラマース・クローニッヒの関係（もともとは因果律）より，屈折と吸収は必ず一組になって現れることになる．

8. ローレンツモデル

だいぶ長い道のりだったが，最後にローレンツモデルと呼ばれる簡単なモデルを使い，屈折率や吸収率の周波数依存性を具体的に調べてみよう．

ローレンツモデルとは，図 7 にあるように，正負の電荷分布の中心が一致しているような誘電体に振動電場を加えて，電荷分布（分極）を強制振動させるというモデルだ．式で書くと，

$$\frac{d^2P(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dP(t)}{dt} + \omega_0^2 P(t) = \omega_0^2 \varepsilon_0 \chi_0 E(t) \tag{40}$$

という，強制振動でおなじみの微分方程式となる．式中，γ は減衰率，ω_0 は系固有の共鳴角周波数である．

(40) 式を解くテクニックとしては，$E(t)$ を複素数の範囲にまで拡張し，$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ とおいて定常状態での解 $P(t) = P_0 e^{-i\omega t}$ を考える方法がある．すると，(40) 式は

$$(-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \omega_0^2)P_0 = \omega_0^2 \varepsilon_0 \chi_0 E_0 \tag{41}$$

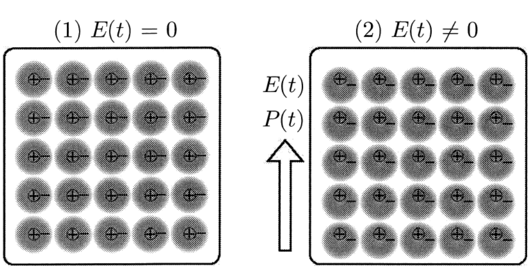


図 7　ローレンツモデル．

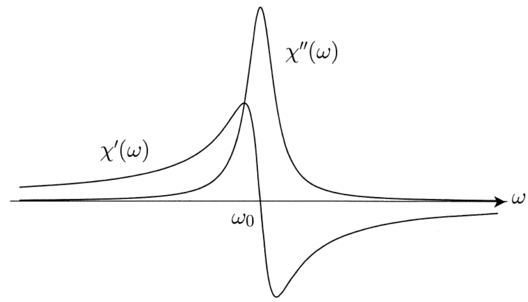


図 8　複素電気感受率の実部と虚部．

となるので，(20) 式と比べれば以下のようになる．

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}\chi_0, \tag{42}$$

$$\chi'(\omega) = \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}\chi_0, \tag{43}$$

$$\chi''(\omega) = \frac{2\omega_0^2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}\chi_0. \tag{44}$$

(43), (44) 式は複雑な形をしており，あまり見通しが良くないので，$\omega \simeq \omega_0 \gg \gamma\ (> 0)$ という赤外から紫外光の周波数領域において妥当な近似を行なえば，

$$\chi'(\omega) = \frac{(\omega_0 - \omega)\omega_0/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}\chi_0, \tag{45}$$

$$\chi''(\omega) = \frac{\omega_0\gamma/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}\chi_0 \tag{46}$$

が導かれる．吸収率に関連する複素電気感受率の虚部 $\chi''(\omega)$ はローレンツ型，屈折率に関連する実部 $\chi'(\omega)$ はその微分である分散型になることを示している（図 8）．

9. 虹の向こうは…

クラマース・クローニッヒの関係，ローレンツモデルとみてきて，媒質による光の屈折は吸収と密接に関わっていることが分かった．でも，虹を産み出す水は，無色透明なので光を吸収しないようにも思える．そう，確かに水は，人間が視覚的に直接確認できる可視域では，ほとんど光を吸収しない．しかし赤外域や紫外域には強い吸収帯が複数存在する．赤外域の吸収は，水分子の O-H 結合の振動によるものだし（振動遷移），紫外域は電

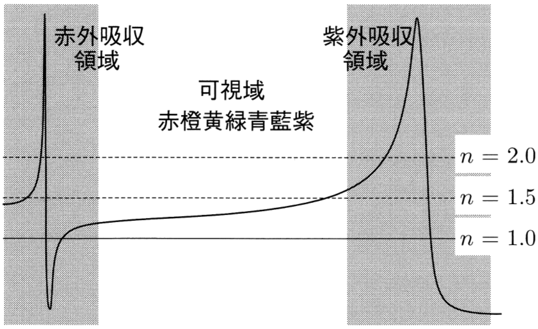


図 9　屈折率の周波数依存性.

子状態の変化（電子遷移）に伴う吸収である.

(45), (46) 式や図 8 からも分かるように，共鳴位置 ω_0 から遠ざかるにつれて，吸収 $\chi''(\omega)$ は周波数差 $(\omega - \omega_0)$ の 2 乗分の 1 で弱くなるが，屈折率 $\chi'(\omega)$ のほうは周波数差分の 1 の依存性が長く尾を引いている．したがって，光の色（周波数）による屈折率の違いは，この赤外吸収や紫外吸収の影響が可視域にも及んでいることに起因する.

試みに，赤外吸収線や紫外吸収線が多数本ある場合の，誘電体の屈折率の周波数依存性を計算した結果を図 9 に示す．パラメーターは適当に選んだので，現実に存在する誘電体ではないが，可視域では周波数が高くなるにつれて屈折率が大きくなるといった傾向は読み取れる.

屈折率が大きければ (9) 式の θ_α も大きくなり，$\alpha(\theta_\alpha)$ は小さくなる．したがって，主虹の場合は紫色がいちばん低く（仰角が小さく）赤色が一番高い（仰角が大きい）ところに見える．副虹はこれが逆の順序となって見えることになる.

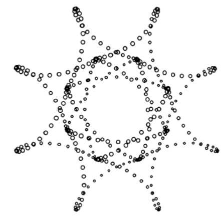
単純にみえる虹ではあるが，基本的なことを説明するだけでも結構いろいろな知識が必要だった．そして実際に大空に架かる虹には，回折や干渉などの影響も少なからず入っているので，幾何光学しか考えなかった本稿の解説は本当に基本の「き」の域を出ない．虹の向こうにあるものは，メルヘンの世界だけではなく，真理を探究するといった人類の永遠不滅なロマンにあふれた世界なのだろう.

（くが・たかひろ，東京大学大学院総合文化研究科）

特集／光と物理学

空の青さ

ベクトル波動光学



本宮　佳典

1. はじめに

鮮やかな空の青さも，よく見れば微妙な色彩を帯びている．しかしここでは，その詳細には立ち入らず，青く見える原理を物理的に説明する代表的な機構として，**レイリー散乱**の概要を紹介する．

夜空の星を見て分かるように，大気はほとんど透明である．それにも関わらず，昼間は星が見えない．大気を通過する太陽光があまりにも強いため，わずかな割合の散乱であっても，空全体から散乱光が明るく降り注いでくるためである（図 1）．

光学的に観察できないほど微小な粒子でも，高強度の光を照射すれば散乱光は観測でき，粒子の存在は検知できる（チンダル現象）．しかし，散乱体が存在することは検知できても，その形や大きさまでは観察できない．青空の場合も，原因となる微粒子が具体的に何であるのか，その実体を直接観測して特定することは難しい．

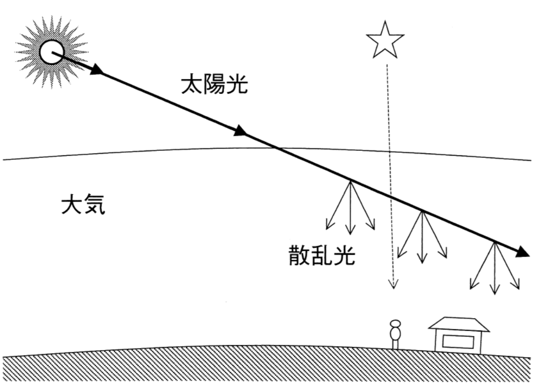


図 1　大気中での太陽光の散乱．

そこで，青空の観測と波動光学的な考察とが繰り返されてきた結果，「波長より十分小さな散乱体による，共鳴周波数より十分低い周波数の光の，エネルギー損失のない散乱」を考えると，空の色の主要な特徴を説明できることが分かってきた．このような散乱モデルはレイリー散乱と呼ばれる．本稿では，電磁場の方程式を基礎として，レイリー散乱の物理的な描像を紹介するとともに，散乱の特性を示す代表的な関係式を導出する．

2. 入射平面波

電磁場は**マクスウェルの方程式**

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{4}$$

に従うものとする．ただし，$\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{i}$, ρ はそれぞれ磁場，電場，電束密度，磁束密度，電流密度，電荷密度とする．時間依存性は $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ で与えられるものとし，時間微分は $-\mathrm{i}\omega$ を乗じて導く．

媒質は線形かつ一様等方で，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{6}$$

が成り立つとする．ただし，ε は媒質の誘電率で，一般には複素数，透明媒質では実数である．また，媒質は非磁性で，透磁率 μ は磁気定数（真空の透磁率）μ_0 に等しいとする．

空間には $\boldsymbol{i}$ も ρ も存在せず，入射光は z 軸方向に進む平面波とする．電場と磁場は，波数と呼ばれる未知定数 k と未知の定数ベクトル $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ を用いて，

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(\mathrm{i}kz), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \exp(\mathrm{i}kz) \tag{8}$$

と表せるものと仮定する．これらを式 (1), (2) に代入すると，任意の複素定数 E_{0x}, E_{0y} を用いて

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{E}_0 = {}^{\mathrm{t}}(E_{0x}, E_{0y}, 0), \tag{10}$$

$$\boldsymbol{H}_0 = \frac{1}{Z}\,{}^{\mathrm{t}}(-E_{0y}, E_{0x}, 0) \tag{11}$$

（左肩の t は転置行列を表す）とすれば解となることがわかる．ただし，λ は波長（入射光の場の z 方向の周期），λ_0 は真空中の波長で，媒質の屈折率 n は電気定数（真空の誘電率）ε_0 を用いて

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} \tag{12}$$

で与えられる．また，Z は媒質の特性インピーダンスで，真空の特性インピーダンス Z_0 を使って

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}{n} = \frac{Z_0}{n} \tag{13}$$

で与えられる．

以下では，電場が x 軸方向に振幅 E_0 で振動し，

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(\mathrm{i}kz) = {}^{\mathrm{t}}(E_0, 0, 0)\exp(\mathrm{i}kz) \tag{14}$$

と表される直線偏光を入射光として考える．

3. 粒子の分極率

標的粒子は座標原点にあり，電場が作用すると内部の電荷分布が移動して双極子が生ずるものと考える．図 2 のように，電場によって正電荷と負電荷の重心が x だけずれるとする．振動子の質量（換算質量）を m，復元力を $m\omega_0^2$ とし，電場による力は x 方向に $eE_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ だけかかるとすると，x に関する**ニュートンの運動方程式**は，

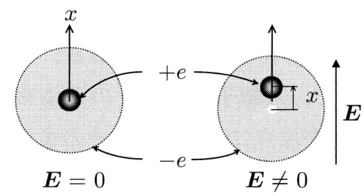


図 2　電場によって誘起される双極子能率．

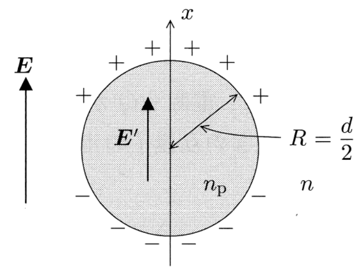


図 3　誘電体球に誘起される双極子能率．

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + m\omega_0^2 x = eE_0\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{15}$$

となる（e は振動する電荷量）．角周波数 ω で振動する定常解として

$$x = x_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{16}$$

なる解を仮定して式 (15) に代入すると x_0 が求まり，

$$x_0 = \frac{e}{m}\frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{17}$$

となる．誘起される双極子能率 $\boldsymbol{p}$ の大きさ p は

$$p = ex_0 = \frac{e^2E_0}{m\omega_0^2} = \alpha E_0 \tag{18}$$

となる．ただし，ω は共鳴周波数 ω_0 より十分小さいと仮定して近似した．等方的な粒子で，線形な応答の範囲であれば $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{E}_0$ に比例する．比例係数 α は**粒子の分極率**と呼ばれる．

粒子として図 3 のように半径 R，屈折率 n_{p}（誘

電率$\varepsilon_{\rm p}=\varepsilon_0 n_{\rm p}^2$）の球が屈折率 n の媒質中にある状況を考え，粒子の分極率を求める．

準備として，**双極子**のまわりの電場を求めておく．電荷 Q が原点にあるとき，そのまわりの静電ポテンシャル ϕ は

$$\phi\,(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{19}$$

である．したがって，電荷 $\pm Q$ が点 $(\pm\varDelta/2,0,0)$ にそれぞれあるときの双極子のポテンシャル $\phi_{\rm d}$ は

$$\begin{aligned}\phi_{\rm d}&=\phi\left(x-\frac{\varDelta}{2},y,z\right)\\&\quad-\phi\left(x+\frac{\varDelta}{2},y,z\right)\\&\approx-\varDelta\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{Q\varDelta}{4\pi\varepsilon}\frac{x}{r^3}=\frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{x}{r^3}\end{aligned} \tag{20}$$

となる．ただし，$\varDelta$ は微小であるとし，双極子能率を $p=Q\varDelta$ と置いた．このときの電場を $\boldsymbol{E}_{\rm d}$ とする．

一様電場 $\boldsymbol{E}$ が印加された空間に，先の球が置かれたとき，球外の電場は $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{\rm d}$ となり，球内の電場は x 方向を向いた一様な電場 $\boldsymbol{E}'$ になるとする（粒子が λ より十分小さく，$\omega\ll\omega_0$ との仮定から，一様静電場への応答を考える）．

このとき，球内（$r<R$）のポテンシャルは，

$$\phi=-\int\boldsymbol{E}'\cdot{\rm d}\boldsymbol{r}=-E'x \tag{21}$$

となり，球外（$r>R$）のポテンシャルは

$$\phi=-\int(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{\rm d})\cdot{\rm d}\boldsymbol{r}=-Ex+\frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{x}{r^3} \tag{22}$$

となる．これらの式から，球の表面位置（$r=R$）でポテンシャルが連続であるための条件として，

$$E'=E-\frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{R^3} \tag{23}$$

が得られる．

一方，球がある場合の分極 $P_{\rm p}$ と，球の代りに外部の媒質がある場合の分極 P との差は，

$$P_{\rm p}-P=(\varepsilon_{\rm p}-\varepsilon)\,E' \tag{24}$$

となる．先の双極子の大きさ p はこれに球の体積を乗じたものであるから，

$$p=\frac{4\pi R^3}{3}\,(\varepsilon_{\rm p}-\varepsilon)\,E' \tag{25}$$

となる．

式 (23), (25) から E' を消去すると，

$$p=4\pi R^3\varepsilon\frac{\varepsilon_{\rm p}-\varepsilon}{\varepsilon_{\rm p}+2\varepsilon}\,E=\alpha E \tag{26}$$

が得られる．ただし，α は**球状微粒子の分極率**で

$$\alpha=4\pi R^3\varepsilon\frac{\varepsilon_{\rm p}-\varepsilon}{\varepsilon_{\rm p}+2\varepsilon}=\frac{\pi}{2}\,d^3\varepsilon_0 n^2\frac{n_{\rm p}^2-n^2}{n_{\rm p}^2+2n^2} \tag{27}$$

のように与えられる（2 番目の表式では，直径 d と屈折率 n, $n_{\rm p}$ で表した）．

4. 電磁波のポテンシャル

式 (14) で与えられる入射波の電場の作用により，粒子には双極子能率が誘起される．その大きさは，粒子の分極率 α と電場の積で与えられる．特に球体の場合，α は式 (27) で与えられる．

誘起された双極子は，入射光の電場に追従して振動する．振動する双極子は電磁波を放射する．これが散乱光となる．その散乱光の場を求める．

電磁場の源として電荷分布 ρ と電流分布 $\boldsymbol{i}$ とが与えられたとき，それによって生ずる電磁場はマクスウェル方程式 (1)–(4) の解として求められる．

ここで，式 (4) が必ず成り立つことから，$\boldsymbol{B}$ はあるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を使って，

$$\boldsymbol{B}={\rm rot}\,\boldsymbol{A} \tag{28}$$

と表すことができる．この $\boldsymbol{A}$ は，**ベクトルポテンシャル**と呼ばれる．式 (28) を式 (2) に代入すると，

$${\rm rot}\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{29}$$

が得られる．演算子 rot が作用して 0 になることから，$\boldsymbol{E}+\partial\boldsymbol{A}/\partial t$ はあるスカラー場 ϕ を使って，

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-{\rm grad}\,\phi \tag{30}$$

と表すことができる．この ϕ は，**スカラーポテンシャル**と呼ばれる．関数 ϕ, $\boldsymbol{A}$ から式 (28), (30) で導かれる $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ は式 (4), (2) を自動的に満たす．

ここで，今の場合（光の角周波数が ω，媒質は透明で ε は実定数，$\mu=\mu_0$），残る (3), (1) を満たすための条件は，その $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ から式 (5), (6) で求まる $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ を式 (3), (1) に代入すれば求まり，それぞれ

$$\nabla^2\phi+\frac{\partial(\mathrm{div}\boldsymbol{A})}{\partial t}=-\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{31}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{i}+\mathrm{grad}\left(\mu_0\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{A}\right) \tag{32}$$

となる．ただし，∇^2 はラプラス演算子と呼ばれ，

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{33}$$

を表す．ここで，ϕ, $\boldsymbol{A}$ の持つ自由度を利用して，

$$\mu_0\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0 \tag{34}$$

を満たすように ϕ, $\boldsymbol{A}$ を選ぶと，式 (31), (32) は

$$\nabla^2\phi-\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{35}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{i} \tag{36}$$

となる．式 (36) は，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i}$ の x, y, z 各成分に対して，

$$\nabla^2 A_q-\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2 A_q}{\partial t^2}=-\mu_0 i_q \tag{37}$$

が成り立つことを意味する（$q=x,y,z$）．関数 ϕ, $\boldsymbol{A}$ の各成分は，**ローレンツ条件**と呼ばれる条件式 (34) で関連づけられるが，式 (35), (36) は同じ形の偏微分方程式になり，見通しよく扱える．式 (34)–(36) を満たす関数 ϕ, $\boldsymbol{A}$ を求めれば，式 (28), (30), (5), (6) を使って $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ を導くことができる．

時間因子が $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ なので，式 (35) は

$$\nabla^2\phi+k^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{38}$$

となる．ここで，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ として

$$G(\boldsymbol{r})=\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}|)}{4\pi|\boldsymbol{r}|} \tag{39}$$

（$G(\boldsymbol{r})$ は**グリーン関数**と呼ばれる）と置くと，

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r})+k^2G(\boldsymbol{r})=-\delta(\boldsymbol{r}) \tag{40}$$

が成り立つので，関数 ϕ が

$$\phi(\boldsymbol{r})=\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{41}$$

のように求まる．ただし，$\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$ は体積要素を表す．

同様に，ベクトルポテンシャル A も

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\iiint\mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}')\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{42}$$

のように求まる．

式 (41), (42) の ϕ, $\boldsymbol{A}$ が式 (34) を満たすことを確認する．畳み込み積分の一般的な公式

$$\int f(x')\,g(x-x')\,\mathrm{d}x'=\int f(x-x')\,g(x')\,\mathrm{d}x' \tag{43}$$

を使って，式 (41), (42) を

$$\phi(\boldsymbol{r})=\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}', \tag{44}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\iiint\mu_0\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{45}$$

と書きかえ，式 (34) の左辺に代入すると，

$$\mu_0\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\mu_0\iiint\left[-\mathrm{i}\omega\rho(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')+\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right]\times\frac{\exp(\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{46}$$

となる．これが 0 になることは，**電荷の保存則**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}=-\mathrm{i}\omega\rho+\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}=0 \tag{47}$$

から分かる．したがって式 (34) が成り立つ．

5. 双極子輻射

原点にある x 軸方向を向いた双極子の大きさ p

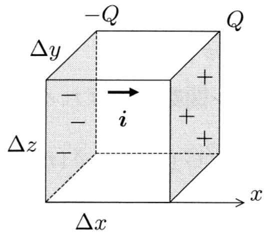


図 4　微小体積内の電流密度と双極子能率.

は，図 4 のように考えると分かるように，

$$p = Q\Delta x = \left[\int i_x \Delta y \Delta z \,\mathrm{d}t\right]\Delta x \qquad (48)$$

と表される．こうして求まる $\boldsymbol{p}$ の時間微分は，電流密度 $\boldsymbol{i}$ の空間積分に等しくなるはずなので，

$$i_x(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\omega p\,\delta(\boldsymbol{r}), \qquad (49)$$

$$i_y(\boldsymbol{r}) = i_z(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (50)$$

と書ける．したがって，$\boldsymbol{A}$ は式 (42) から

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\frac{\omega\mu_0 p}{4\pi}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \qquad (51)$$

となる．また，ϕ は式 (34) を時間積分して，

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\frac{1}{\mu_0\varepsilon}\,\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{\mathrm{i}kx}{r^2}+\frac{x}{r^3}\right)\exp(\mathrm{i}kr) \qquad (52)\end{aligned}$$

となる．

式 (52), (51) により，電磁場のポテンシャルが求まった．これらを式 (30) に代入して電場 $\boldsymbol{E}$ が求まり，式 (28), (6) に代入すれば磁場 $\boldsymbol{H}$ が求まる．導出は容易だが，紙数の都合で省略する．結果として得られる式は，r^{-1}, r^{-2}, r^{-3} 等の因子を持つ項からなる．**遠方の解**に関心があるものとして，遠方での支配項のみを示すと，

$$\boldsymbol{E} \approx \frac{pk^2}{4\pi\varepsilon}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}\begin{pmatrix}1-(x^2/r^2)\\-xy/r^2\\-xz/r^2\end{pmatrix}, \qquad (53)$$

$$\boldsymbol{H} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}\frac{p\,k^2}{4\pi\varepsilon}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}\begin{pmatrix}0\\z/r\\-y/r\end{pmatrix} \qquad (54)$$

となる．電磁場の向きを決めるのは，$\boldsymbol{r} = {}^{\mathrm{t}}(x, y, z)$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ と，双極子の向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$ である．これらを用いると，式 (53), (54) は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{\pi p}{\varepsilon\lambda^2}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}\left[\boldsymbol{e}_x - (\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_x)\boldsymbol{e}_r\right]\\ &= \frac{\pi p}{\varepsilon\lambda^2}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_x)\times\boldsymbol{e}_r, \qquad (55)\\ \boldsymbol{H} &= \frac{\pi p}{\varepsilon\lambda^2 Z}\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_x) \qquad (56)\end{aligned}$$

と書ける．ただし，式 (9) を用いて ω や k の代わりに媒質中の波長 λ を使った．また，一般的な公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a} \qquad (57)$$

を使った．これらの式から，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{e}_r$ が互いに直交して右手系をなし，

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{Z}\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{E} \qquad (58)$$

の成り立つことがわかる．

双極子輻射の強度は**ポインティングベクトル**によって与えられ，式 (55), (56) から

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{S}\rangle &= \langle\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\exp(-\mathrm{i}\omega t)]\times\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}\exp(-\mathrm{i}\omega t)]\rangle\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})\\ &= \frac{\pi^2|p|^2}{2Z\varepsilon^2\lambda^4}\frac{1}{r^2}\left[\boldsymbol{e}_x-(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_x)\,\boldsymbol{e}_r\right]\times(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_x)\end{aligned} \qquad (59)$$

が得られる（角括弧 $\langle\ \rangle$ は時間平均を表す）．

ここで，式 (57) を使って式 (59) を整理すると，

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{\pi^2|p|^2}{2Z\varepsilon^2}\frac{1}{\lambda^4}\frac{1-(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_x)^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (60)$$

となる．これが双極子輻射の強度を表す．

6. レイリー散乱

平面波が微粒子に，振動する双極子を誘起し，その振動双極子によって双極子輻射が放射されるとする．入射波が式 (14) で与えられるとき，$p = \alpha E_0$ となる．これを式 (55), (56) に代入すれば，散乱

界の電磁場の式が得られる．電磁場の強度を分かり易くするため，電場，および磁場方向の単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_E = \frac{(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_x) \times \boldsymbol{e}_r}{|(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_x) \times \boldsymbol{e}_r|} = \frac{(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_x) \times \boldsymbol{e}_r}{\sqrt{1-(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_x)^2}}, \tag{61}$$

$$\boldsymbol{e}_H = \frac{\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_x}{|\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_x|} = \frac{\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_x}{\sqrt{1-(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_x)^2}} \tag{62}$$

を使って式 (55), (56) を表すと

$$\boldsymbol{E} = \frac{\pi\alpha E_0}{\varepsilon\lambda^2}\frac{\exp(ikr)}{r}\sqrt{1-(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_x)^2}\,\boldsymbol{e}_E, \tag{63}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\pi\alpha E_0}{Z\varepsilon\lambda^2}\frac{\exp(ikr)}{r}\sqrt{1-(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_x)^2}\,\boldsymbol{e}_H \tag{64}$$

となる．また，式 (60) は

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{\pi^2 |\alpha|^2}{2Z\varepsilon^2\lambda^4}|E_0|^2 \frac{1-(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_x)^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{65}$$

となる．すなわち，x 軸方向（$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x$ の場合）には光が行かないことが分かる．

図 5 に，$\boldsymbol{r}$ 方向の十分遠方における $\boldsymbol{e}_E$ と $\boldsymbol{e}_H$ の向きを示した．ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{r}$ が張る面 Σ を考えると，$\boldsymbol{e}_E$ は面 Σ の面内方向を向く．また，$\boldsymbol{e}_H$ は面 Σ に垂直である．すなわち，ベクトル $\boldsymbol{r}$ の先端を x 軸の周りに回転してできる円の接線方向を向く．

入射光の電場の式 (14) は，式 (10), (11) で，$E_{0x} = E_0, E_{0y} = 0$ と置いたものであった．これらを使うと，入射光の強度 I_0 は

$$I_0 = \left|\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H})\right| = \frac{1}{2Z}\,|E_0|^2 \tag{66}$$

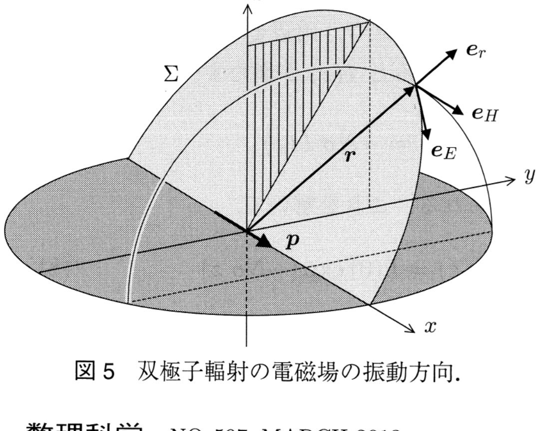


図 5 双極子輻射の電磁場の振動方向．

となる．すなわち式 (65) は I_0 を使って

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{\pi^2 |\alpha|^2}{\varepsilon^2\lambda^4} I_0 \frac{1-(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_x)^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{67}$$

と書くこともできる．**波長の 4 乗に反比例**することから，短波長の光（青色）ほどよく散乱すること，長波長の光（赤色）ほど散乱されずに直進することなどが分かる．

入射光が直線偏光している場合のレイリー散乱は，式 (63), (64) で電場と磁場が与えられ，式 (67) で強度分布が与えられた．

次に，太陽光を想定して，入射光が非偏光の場合を考える．式 (55), (56) では入射光が x 方向に限定されていたが，もし y 方向に偏光している場合には $\boldsymbol{e}_x$ の代わりに $\boldsymbol{e}_y$ と書いた式が成り立つ．したがって，電場が式 (10) で表される場合は，双極子を

$$\alpha E_0 \boldsymbol{e}_x \to \alpha\,(E_{0x}\boldsymbol{e}_x + E_{0y}\boldsymbol{e}_y) \tag{68}$$

と置き換えることができ，式 (55) の代わりに

$$\boldsymbol{E} = \frac{\pi\alpha}{\varepsilon\lambda^2}\frac{\exp(ikr)}{r}[\boldsymbol{e}_r \times (E_{0x}\boldsymbol{e}_x + E_{0y}\boldsymbol{e}_y)] \times \boldsymbol{e}_r \tag{69}$$

が成り立つ．

非偏光は，単一波長と見なせるほどの狭い帯域幅内で，わずかずつ周波数の異なる多数の周波数成分が，互いに相関なく重なり合った状況と考えられる．その多数の成分の統計的な特性を表現するため，式 (10) の E_{0x} と E_{0y} は確率変数と考え，

$$\langle |E_{0x}|^2 \rangle = \langle |E_{0y}|^2 \rangle = ZI_0, \tag{70}$$

$$\langle E_{0x}^* E_{0y} \rangle = 0 \tag{71}$$

との仮定を置く（角括弧 $\langle\ \rangle$ は統計平均を表す）．

式 (59), (69) を使うと，散乱光の強度は

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2Z}\langle |\boldsymbol{E}|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2Z}\frac{\pi^2|\alpha|^2}{\varepsilon^2\lambda^4}\frac{1}{r^2}\langle |E_{0x}(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_x) \times \boldsymbol{e}_r \\ &\qquad + E_{0y}(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_y) \times \boldsymbol{e}_r|^2 \rangle \\ &= \frac{\pi^2|\alpha|^2}{2\varepsilon^2\lambda^4}\frac{I_0}{r^2}\left[|(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_x) \times \boldsymbol{e}_r|^2\right. \end{aligned}$$

$$+\left|(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_y) \times \boldsymbol{e}_r\right|^2\Big] \quad (72)$$

となる．系は z 軸のまわりに軸対称なので，一般性を失わず

$$\boldsymbol{e}_r = {}^{\mathrm{t}}(\sin\theta, 0, \cos\theta) \quad (73)$$

と置くと，式 (72) は

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi^2 |\alpha|^2}{2\varepsilon^2\lambda^4}\frac{I_0}{r^2}\left(\left|\cos\theta \boldsymbol{e}_{/\!/}\right|^2 + \left|\boldsymbol{e}_y\right|^2\right) \\ &= \frac{\pi^2 |\alpha|^2}{2\varepsilon^2\lambda^4}\frac{I_0}{r^2}\left(\cos^2\theta + 1\right) \end{aligned} \quad (74)$$

となる．ただし，$\boldsymbol{e}_{/\!/}$ は

$$\boldsymbol{e}_{/\!/} = {}^{\mathrm{t}}(\cos\theta, 0, -\sin\theta) \quad (75)$$

で定義される長さ 1 のベクトルである．

入射光の伝搬方向（z 軸方向）と散乱光を観測する方向の両方向を含む面（今の場合は xz 面）を**観測面**と呼ぶ．式 (72) から (74) を導く過程で分かるように，式 (74) 右辺の括弧内の第 1 項は，電場が観測面内の方向（今の場合は $\boldsymbol{e}_{/\!/}$ 方向）に振動する成分の寄与，第 2 項は観測面に垂直な方向（今の場合は $\boldsymbol{e}_y$ 方向）に振動する成分の寄与を表す．両成分の差と和の比を**偏光度** M とすると，θ の関数として

$$M(\theta) = \frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta} \quad (76)$$

のように表される．

図 6 に，散乱光の強度の θ 依存性を示した．式 (74) の括弧内の第 1 項は $\cos^2\theta$ に比例し，第 2 項は 1 に比例すること，また，前方と後方に対称的に散乱することなどが特徴的である．

空からの光は偏光している．角度 θ が直角に近いとき，電場が観測面内の方向に振動する偏光成分の割合は減少する．地上から見て太陽から約 90 度離れた領域を偏光板を通して観察すると，偏光度が高く，偏光方向を容易に確認することができる．

単位時間に散乱される全エネルギーは，原点を中心とする大きな球面の上で，式 (74) を積分して，

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{tot}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I(\theta,\varphi)\, r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\pi^3 |\alpha|^2}{\varepsilon^2\lambda^4} I_0 \int_0^{\pi}\left(\cos^2\theta + 1\right)\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8}{3}\frac{\pi^3 |\alpha|^2}{\varepsilon^2\lambda^4} I_0 \end{aligned} \quad (77)$$

のように求まる．

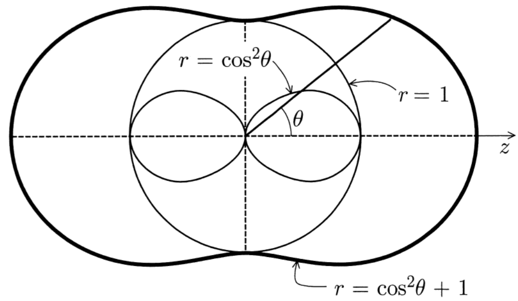


図 6　レイリー散乱の散乱角の θ 依存性

入射光に垂直な面積 σ の仮想的な面を単位時間に通過するエネルギーは σI_0 である．これが式 (77) の I_{tot} に等しくなるような σ の値は，

$$\sigma = \frac{I_{\mathrm{tot}}}{I_0} = \frac{8}{3}\frac{\pi^3 |\alpha|^2}{\varepsilon^2\lambda^4} \quad (78)$$

で与えられる．これは，散乱の強さを表す指標で，散乱の**全断面積**と呼ばれる．

こうした粒子が空間に密度 N で分布していたとする．この空間を光ビームが伝搬するときの強度 $I(z)$ の減衰を考える．このとき，光ビーム内の単位断面積，単位時間あたりに通過するエネルギーを考えると，Δz だけ進む間に $N\Delta z$ 個の散乱粒子によって，それぞれ $I(z)\sigma$ だけのエネルギーが散乱される．したがって，

$$I(z+\Delta z) - I(z) = -\sigma I(z) N \Delta z \quad (79)$$

の関係が成り立つ．両辺を Δz で割って $\Delta z \to 0$ の極限をとると $I(z)$ が満たすべき微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -N\sigma I(z) \quad (80)$$

が得られる．これを解いて，

$$I(z) = I(0)\exp(-N\sigma z) \quad (81)$$

が得られる．減衰の強さを特徴づける指標として，**散乱係数** $k_{\mathrm{S}} = N\sigma$ が使われる．

以上，粒子の分極率 α を用いてレイリー散乱の代表的な数式を導いたが，α の部分に式 (27) の表式を用いれば，透明球によるレイリー散乱の表式が導かれる．例えば，式 (74), (78) から

$$I = I_0 \frac{\pi^4}{8} \frac{d^6}{\lambda^4 r^2} \left(\cos^2\theta + 1\right) \left(\frac{n_\mathrm{p}^2 - n^2}{n_\mathrm{p}^2 + 2n^2}\right)^2, \tag{82}$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5}{3} \frac{d^6}{\lambda^4} \left(\frac{n_\mathrm{p}^2 - n^2}{n_\mathrm{p}^2 + 2n^2}\right)^2 \tag{83}$$

など，文献等でよく紹介される表式が得られる．

7. おわりに

空からの光の主な特徴がレイリー散乱で説明できることが分かった．しかし，散乱体の正体を特定するためには，さらに検討が必要であった．微小な水や氷の球では安定に存在できるか疑問である．偏光度が 90 度で最大にならないなど，散乱特性の詳細に踏み込むことで，空気分子による散乱が青空の主原因であること[1]，水分子なども夕焼けに重要な寄与のあること[2]などが知られてきた．また，SATP（標準環境温度と圧力）での空気分子 1 個当たりの占有領域の平均的体積を計算してみると，

$$\frac{V}{N} = \frac{RT}{PN_\mathrm{A}} \approx 40.6\,\mathrm{nm}^3/\text{粒子} \tag{84}$$

となり，その立方根は約 3.44 nm となる．すなわち，気体分子の間隔は波長に比べて非常に小さい．このような場合，各粒子の散乱光が互いに打ち消し合う効果も生ずるため，大気の密度揺らぎによって空の色（散乱光の強度）が決まるとの見方もできる[3]．

以上の扱いでは，粒子は透明で，分極が入射光の振動と同位相で追従するとした．しかし，入射平面波と散乱光が重畳された電磁場の全体でエネルギー保存則を満たすためには，分極の位相は入射光に対してわずかに遅れる必要がある[4]．

電磁場のマクスウェル方程式に基づき，微粒子による平面波の散乱という単純なモデルで，青空や夕焼けの概略を理解できることを紹介した．空の色を改めて味わっていただく一助になれば幸いである．

なお，波長に比べて無視できない大きさの球状粒子による散乱は，ミー散乱[5]として知られている．雲，霧，虹などの気象現象に関わる光や近接場光学などで，幅広く用いられる．レイリー散乱は，ミー散乱において粒子が小さい極限に相当する．

参考文献

1) 鶴田匡夫,『第 8・光の鉛筆』, p.95, アドコム・メディア (2009).
2) J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, p.462, Wiley (1999).
3) E. Hecht, *Optics*, p.86, Addison Wesley (2002).
4) 本宮佳典,「波動光学の風景 91. レイリー散乱」*O plus E* **34** (12), 1166–1175 (2012).
5) C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, Wiley-Interscience (1983).

（ほんぐう・よしのり，(株)東芝 研究開発センター）

黒体輻射

平野　琢也

1. はじめに

地球より遥か1億5千万キロメートルの虚空に浮かぶ太陽は，休むことなく莫大なエネルギーを周りの空間に放出し，その一部は地球上に降り注ぎ，私たちに恩恵を与えてくれている．寒い冬の日の陽射しの暖かさ，そして，じりじりと照りつける夏の日の太陽の光は，自然の暖かさや力強さを私たちに教えてくれる．

この太陽が光を出す原理は，白熱電球や豆電球が明るく光る原理と同じで，**熱放射**である．熱放射は，物体が有限の温度を持っているときに，可視光や目に見えない赤外線，マイクロ波などを放出する現象であり，私たちの身の周りのものはすべて有限の温度を持っていることから，身の周りでいつでも起こっている現象である．

熱放射は，身近であると同時に，物理学にとって，とても重要な現象である．19世紀の終わりの1900年に，マックス・プランクは，熱放射の理論的な式を導出する過程で，量子論の始まりとなる概念を導入し，現代に続く量子力学の扉を開いた．21世紀の初めの2001年に米国から打ち上げられた宇宙探査機は，宇宙の熱放射について詳細に調べ，宇宙の組成のうち，通常の物質が占める割合はわずか4.6%であり，残りの22.7%は正体不明の暗黒物質，そして残りの72.8%は，これも正体不明の暗黒エネルギーであるという驚くべき知見をもたらした．このことは，量子力学の扉が開かれた後の100年間の知的な営みにもかかわらず，人類はまだ自然のごく一部しか理解していないことを示している．

さて，熱放射には，いくつかの特筆すべき特徴がある．目で見てすぐに分かる特徴は，放出される電磁波の波長が温度によって変化することだ．太陽の表面（光球）は温度が6000度程度であり，目に見える可視光を多く出している[*1)]．白熱電球や豆電球は，フィラメントの温度が3000度程度であり，赤みを帯びた暖かい色が特徴である[*2)]．白熱電球や豆電球の色味は，電流量によって変化し，電流が少ないと（フィラメントの温度が低いと），より赤みを帯びた色となり，温度による変化を目で感じることができる[*3)]．以下では，このような熱放射の特徴，放射と吸収の関係，プランクの輻射公式などについて述べた後，熱放射の制御による熱放射光源の改善の試みについて紹介する．

---

*1)　地球上の生物の目は，太陽の光が良く見えるように進化してきたと，むしろ，考えるべきだろう．

*2)　宇宙の熱放射は，温度が絶対零度に近く，残念ながら人間の目で直接見ることはできない．もっとも，きれいに澄んだ夜空の星々を見上げれば，表面温度の高い青白い星や，温度の低い赤い星を見ることができる．

*3)　これら熱放射による光源は，蛍光灯や，そして最近は急速に発光ダイオード（LED）に置き換わり，身の周りから姿を消しつつある．筆者の勤務する大学では，黒体輻射に関する学生実験（宇宙の背景放射と豆電球の温度を測定する）を行っている．その際の会話で驚いたのは，電球や豆電球がなぜ光るかを考えたことがないという発言である．しかし，もう数年もすれば，日常生活では熱光源を目にしなくなり，そのような発言が当然のことになるのかもしれない．

2. キルヒホッフの法則

グスタフ・ローベルト・キルヒホッフ（Gustav Robert Kirchhoff）は，1824年にケーニヒスベルク（現カリーニングラード）で生まれた物理学者であり[1]，1859年から1860年にかけて，熱放射に関する重要な研究を行った[2]．マクスウェルが，マクスウェル方程式に関する論文を出版したのは1865年であるので[3]，その少し前になる．キルヒホッフが熱放射をどのように捉えていたかについては，1866年に出版された論文の冒頭で次のように述べている[4]．“熱線（heat rays）は光線（light rays）と同じ性質を持ち，後者は前者の特別な場合にあたる．目に見えない熱線と光線との違いは，振動の周期，つまり，波長の違いのみである．すべての熱線は，光線に対して知られているものと同じ法則に従って伝播する.”

熱放射に関するキルヒホッフの法則と呼ばれるものの最も主要な部分は，物体の熱放射の強度と吸収率がどのような場合であっても比例するという法則である[*4)]．キルヒホッフは，熱放射の問題を熱力学の知見と組み合わせ，思考実験によりこの普遍的な法則を導いた[*5)]．この思考実験は，近年注目を集めている熱放射制御の観点からも興味深いと思われるので，本稿では，キルヒホッフの最初の証明の設定を修正し，フィルターを用いた議論[6]と組み合わせた導出を紹介する．

図1のように，熱放射を完全に反射する（反射率が1の）壁に囲まれた領域を考える．この領域は，中間にある壁により左右に分割されており，左右を結ぶ部分の断面積は一定とする．中間の壁はフィルター機能を持っており，ある特定の熱放射のみを透過し，それ以外は反射するとする．左右の領域は，中間の壁を透過する熱放射を通して，熱を交換することができる．左側の端の壁は物体1により，右側の端の壁は物体2により，被われている．

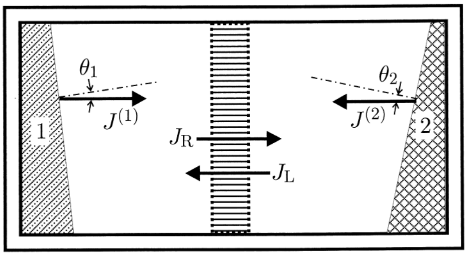


図1　熱放射の強度と吸収率の比の普遍性を示す思考実験．完全反射の壁に囲まれた領域をフィルターにより2つに分割し，片側の端に物体1を，もう片側の端に物体2を置く．

キルヒホッフにならって，物体から放出される熱線は，光線と同じように振る舞うものとし，ここでは熱線の偏光についても考えることにする[*6)]．この偏光の自由度を記号 σ で表す．今，図に示すように，中間の壁は周りの壁に垂直に立っており，そのフィルター機能は，偏光が σ で，中間壁に垂直（許容立体角 $\Delta\Omega$）に入射する振動数 $\nu \sim \nu + \Delta\nu$ の熱線のみを透過するとする．

以下では，物体1と物体2が温度 T の熱平衡状態にある場合を考える．物体1の表面は，中間壁と平行ではなく，θ_1 傾いているとする．時間 Δt の間に物体1から放出され，中間壁に垂直に入射する振動数 ν，偏光 σ の熱線のエネルギーは，$J_T^{(1)}(\nu, \sigma, \theta_1) S \Delta\nu \Delta\Omega \Delta t$ と表せる．$J_T^{(1)}(\nu, \sigma, \theta_1)$ は温度 T の物体1から，表面の垂線に対して θ_1 方向に放出される，振動数 ν，偏光状態 σ の熱放射の，単位面積，単位振動数，単位立体角あたりの強度である．S は中間壁の表面積であり，物体1の表面積に $\cos\theta_1$ を掛けたものに等しい．同様に，物体2からは，時間 Δt の間に，$J_T^{(2)}(\nu, \sigma, \theta_2) S \Delta\nu \Delta\Omega \Delta t$ のエネルギーの熱線が中間壁に入射する．

これらの熱線は，何度か領域内を往復するうち

*4)　キルヒホッフの法則といえば，電気回路に関する法則を思い浮かべる人が多いだろう．この法則は，キルヒホッフがまだ学生であった1845年に報告したものである[1]．

*5)　この比例関係については，スチュワートが先に論じていたが，普遍的な議論を行ったという点でキルヒホッフに優先権があるとされている[1,5]．

*6)　光は横波であるので，進行方向に対して，垂直な方向に振動している．偏光は，振動方向に垂直な平面内のどの方向に振動しているかを表す．一般に，物体から放出される熱放射の強度は，放出される方向や偏光に依存する．また，近年は4節で述べるように，物体の表面を制御することで，熱放射の空間パターンや偏光を制御する試みが行われている．

に，物体に吸収あるいは散乱され，平衡状態に達しているときは，熱線の流れは定常的になっていると考えられる．熱線の流れが定常的になっているときに，中間壁を右向きに流れる熱線のエネルギーを $J_{\mathrm{R}}(\nu,\sigma)S\Delta\nu\Delta\Omega\Delta t$, 左向きに流れる熱線のエネルギーを $J_{\mathrm{L}}(\nu,\sigma)S\Delta\nu\Delta\Omega\Delta t$ とする．中間壁を透過し左向きに進む熱線は，物体 1 に入射角 θ_1 で入射し，一部は吸収され，一部は逆向きに進む方向に反射される．吸収される割合を $A_1(\nu,\sigma,\theta_1)$ とすると，反射される割合は $\{1-A_1(\nu,\sigma,\theta_1)\}$ になると考えられる[*7]．よって，中間壁を左向きに透過した熱線の反射により，右向きに進む，$\{1-A_1(\nu,\sigma,\theta_1)\}J_{\mathrm{L}}(\nu,\sigma)S\Delta\nu\Delta\Omega\Delta t$ のエネルギーの流れが生じる．この反射による右向きの熱線と，物体 1 が放出する熱線の合計が，中間壁に右向きに入射する熱線となる．すなわち，

$$J_{\mathrm{R}}(\nu,\sigma)=J_T^{(1)}(\nu,\sigma,\theta_1)+\{1-A_1(\nu,\sigma,\theta_1)\}J_{\mathrm{L}}(\nu,\sigma) \qquad (1)$$

である．同様にして，中間壁を左向きに透過する熱放射のエネルギーは以下のように表せる．

$$J_{\mathrm{L}}(\nu,\sigma)=J_T^{(2)}(\nu,\sigma,\theta_2)+\{1-A_2(\nu,\sigma,\theta_2)\}J_{\mathrm{R}}(\nu,\sigma). \qquad (2)$$

さて，熱平衡状態では，$J_{\mathrm{R}}=J_{\mathrm{L}}$ でなければならない．なぜなら，もしも $J_{\mathrm{R}}\neq J_{\mathrm{L}}$ であるとすると，同じ温度の物体の間にエネルギーの流れが存在することになり，熱力学の第 2 法則に反するからである．

よって，式 (1) と (2) より，次式が得られる．

$$J_{\mathrm{R}}(\nu,\sigma)=J_{\mathrm{L}}(\nu,\sigma)=\frac{J_T^{(1)}(\nu,\sigma,\theta_1)}{A_1(\nu,\sigma,\theta_1)}=\frac{J_T^{(2)}(\nu,\sigma,\theta_2)}{A_2(\nu,\sigma,\theta_2)}. \qquad (3)$$

ここで，図 1 の思考実験の配置に戻って，物体 2 の傾斜角を θ_2 から別の角度 θ_2' に変更したとする．上と同じ議論をもう一度行うと，式 (3) において，θ_2 を θ_2' に置き換えた式が得られる．また，物体 2 を，領域の右側の壁に押し付けたまま，右側の壁に垂直な軸の周りに回転したとする（物体 2 の傾斜角は変化しない）．この場合でも，やはり式 (3) は成り立つはずである．このとき，物体 2 の表面に固定した座標系で見ると，中間壁を透過する偏光は，回転角分だけ回転した別の偏光に見える．この偏光の状態を σ' と表し，式 (3) の 2 行目に現れる偏光は，物体表面に対する偏光であると解釈すると，

$$\frac{J_T^{(1)}(\nu,\sigma,\theta_1)}{A_1(\nu,\sigma,\theta_1)}=\frac{J_T^{(2)}(\nu,\sigma,\theta_2)}{A_2(\nu,\sigma,\theta_2)}=\frac{J_T^{(2)}(\nu,\sigma,\theta_2')}{A_2(\nu,\sigma,\theta_2')}=\frac{J_T^{(2)}(\nu,\sigma',\theta_2)}{A_2(\nu,\sigma',\theta_2)} \qquad (4)$$

と書くことができる．すなわち，式 (3) の比の値は，物体の種類や放出角度，偏光状態に依存しない普遍的な量であることが分かる．そこで，この比の値を $J_T^{bb}(\nu)$ と表すことにすると，熱平衡状態にある任意の物体の熱放射の強度 $J_T(\nu,\sigma,\theta)$ を吸収率 $A(\nu,\sigma,\theta)$ で割った値は，物体の種類や熱放射の偏光 σ，放出角 θ によらず，温度 T と振動数 ν のみで決まる普遍的な関数となる．

$$\frac{J_T(\nu,\sigma,\theta)}{A(\nu,\sigma,\theta)}=J_T^{bb}(\nu). \qquad (5)$$

これが，熱放射に関するキルヒホッフの法則である．

式 (5) において，$A(\nu,\sigma,\theta)=1$ とすると，左辺の分子の J_T は，熱放射をすべて吸収し，反射率がゼロの物体の熱放射の強度を与える．すべての振動数において常に吸収率 $A(\nu,\sigma,\theta)$ が 1 となるような仮想的な物体を**黒体**（black body）と呼び，熱平衡状態にある黒体の熱放射を**黒体輻射**（または黒体放射，black body radiation）と呼ぶ．すなわち，$J_T^{bb}(\nu)$ は黒体輻射の強度を与える関数である．式 (3) より，J_{R} と J_{L} は黒体輻射の強度 $J_T^{bb}(\nu)$ に等しいことが分かる．キルヒホッフは，温度 T の物体に囲まれた空洞内の熱放射が熱平衡状態にあるとき，物体の吸収率が 1 ではなくても，空洞内の熱放射が黒体輻射に等しいことを示し，仮想的な黒体の実現方法にも示唆を与えた．

*7) 進行方向が変わって異なる方向に進む熱線もあるが，平衡状態では，進行方向の分配は釣り合っているはずであり，進行方向の変化の寄与は打ち消し合うはずである．

黒体輻射の強度を与える関数 $J_T^{bb}(\nu)$ について，キルヒホッフは次のように述べ，後世に課題を与えた[2,5]．「この関数を見出すことは極めて重要な課題である．その実験的決定には大きな困難が横たわっているにも拘わらず，それを知り得るという希望は根拠があると思う．なぜなら，個々の物体の性質に依らない今迄に知られている総ての関数が簡単な形をしているように，それも簡単なものであることは，殆んど疑いが無いからである.」この関数は，約40年後にプランクの輻射公式により与えられた．

■ 3. プランクの輻射公式 ■

マックス・カール・エルンスト・ルートヴィッヒ・プランク（Max Karl Ernst Ludwig Planck）は1858年にドイツのキールに生まれ，1889年にキルヒホッフの後任として，ベルリン大学に採用された[7]．1900年10月7日日曜日の午後に熱放射に関する最新の実験結果を聞き，その日の夕方に次式のような**プランクの輻射公式**を発見した[2)*8]．

$$\rho(\nu,T)=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}. \tag{6}$$

そして，その2カ月後には，ある仮説を立てることにより，この公式を導き出すことに成功した．この仮説こそ，量子論の出発点になったものである．これらの日付だけを見ると，とても簡単に研究が進展したという印象を受けるが，実際には，その前には長い紆余曲折の研究があり，また，公式が導出された後も，それをどう解釈すればよいのか容易に分かるようなことではなかった．プランク自身も，1918年に行ったノーベル物理学賞の講演の冒頭で，ゲーテの「人は努力する限り迷うものだ」という言葉を引用し，紆余曲折の研究を振り返っている[7]．

非常に興味深いことに，プランクの輻射公式には，物理の基本的な定数が3つ入っている．1つめは，光速 c である．この頃には，マクスウェル方程式の定式化から35年が経過し，1888年にはヘルツにより電磁波の存在が実験的に確かめられ，光が電磁波であるという考えは定着していた．また，その値も，比較的良く決定されていた[*9]．2つめは，ボルツマン定数 k である．ボルツマン定数は，絶対温度 T とミクロなエネルギーの換算を与える統計物理学の最も重要な定数であり，プランクは，熱放射について当時知られていた実験結果より，ボルツマン定数の値を初めて精密に算出した．そして，気体定数の値を使ってアボガドロ数を算出し，さらに，電気素量の値を算出した．このようにして得た電気素量の値は，非常に精度の高い数字であり，実験的にその正しさが確認されるまでに10年の歳月が必要であった．3つめの基本定数は，プランク定数 h である．プランクの輻射公式とともに初めて登場し，私たちの自然に対する認識を変えていくことになる普遍定数である．プランクはノーベル賞受賞講演の中で[7]，この定数が「エントロピーに対する正しい表式を得るのに絶対不可欠である一方」，定数が意味することを「何らかの妥当な形で古典論の枠内にはめこもうという，あらゆる努力を阻み抗らうことがわかりました.」と述べている．以上のように，3つの普遍的な基礎定数を含んでいるということからも，この式が新しい物理学の幕開けを告げた重要な式であることが理解できる．

プランクが輻射公式を導出した過程については，様々な文献を参照することができ[2,5,7]，また，優れた解説も参照することができる[6,8]．ここでは，ごく簡単にその概略を紹介したい．

プランクは，式(5)の右辺の関数を見出すというキルヒホッフの課題に対して，当初は，古典電気力学の諸法則により目的を達成できるという期待を持っていた[7]．空洞内の壁に多数の振動する電気双極子をおくと，これらは電磁波を吸収放出することで互いにエネルギーを交換し，最後には，キルヒホッフの法則に対応する定常的な黒体輻射

---

*8) ρ は黒体輻射のエネルギー密度であり，輻射の強度 J_T^{bb} とは，$J_T^{bb}=(c/4\pi)\rho$ という関係がある．

*9) 但し，今日のように，どのような慣性座標系でも変わらない普遍的な定数として認識されるのは，アインシュタインの特殊相対性理論の誕生後である．

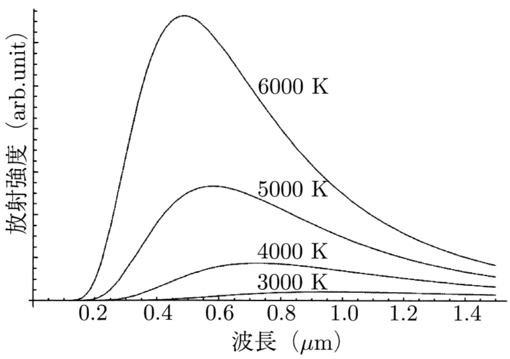


図 2　黒体輻射強度の波長依存性.

になるのではないかと期待したのである．しかし，この設定で熱平衡状態に至る不可逆な過程を導くことはできず，その試みは失敗に終わった．そこで，プランクは熱力学の側から課題に取り組むことにし，エネルギーとエントロピーの関係に注目した．そして，エネルギーをどこまでも小さく分割することはできず，有限の「エネルギー要素」からなるとすると，望みのエントロピーを導くことができ，そこから式 (6) が得られ，そして，量子論が生まれた[2]．

温度が 3000 K から 6000 K のとき，黒体輻射の強度を波長の関数として図 2 に示す．温度が高くなるとともに，放射強度が強くなり，強度がピークとなる波長が短くなる様子が分かる[*10]．

■　4. 熱放射の制御　■

式 (5) で表されるキルヒホッフの法則によると，ある波長における放射強度は，黒体輻射の場合の強度に吸収率を掛けたものになる．そのため，吸収率 $A(\nu,\sigma,\theta)$ が小さくなるとき，すなわち，反射率 $R(\nu,\sigma,\theta)=1-A(\nu,\sigma,\theta)$ が 1 に近づくとき，熱放射の強度はゼロに近づく．そこで，物体表面に加工を施し，吸収・反射率を変化させることにより，物体の熱放射を制御できるはずである[9]．

図 2 に示されているように，温度が低くなると，黒体輻射は波長の長い光の割合が多くなり，人の目に良く見える可視光（波長が 0.4 μm〜0.7 μm 程度）の割合は小さくなる．例えば，温度が 3000 K のとき，ピーク波長は約 1 μm であり，全放射エネルギーのうち可視光の割合は 8%程度である．タングステンは，金属では最も高い融点 3660 K を持ち，電球のフィラメントに用いられているが，実はこの温度でも，可視光用の光源としては効率が悪いことが分かる．そこで，発光させたい波長以外の吸収率を小さくすることで，熱放射光源の効率を大幅に改善できる可能性がある[10]．白熱電球や豆電球の温度は，電源からフィラメントに供給する電気エネルギーと，熱放射と熱伝導により電球外に運ばれるエネルギーが釣り合うところまで上昇する．熱放射を制御することにより，可視光以外の熱放射を小さくすることができれば，熱放射により電球外に運ばれるエネルギーが少なくなるので，同じ温度を維持するのに必要な電力を削減することができる．

物体の吸収率の制御は，表面に微細な構造を作成する方法や薄膜をつける方法などが試みられている．これらの研究のいくつかを紹介すると，炭化ケイ素の表面に，回折格子のような周期的な溝を形成した実験では，波長約 11 μm の赤外の熱放射が鋭い方向依存性を示したこと[9]，金の薄膜に周期構造を作成した実験では，波長広がりの小さい波長約 5 μm の熱放射の発生が温度によらず発生したことが報告されている[11]．そして，ガリウムヒ素の基板に穴を開けてフォトニック結晶を作成した実験では，波長約 10 μm の指向性を持った波長広がりの小さな熱放射が実現され，外から与える電気エネルギーの増加に伴って急激に温度が上昇すること，同じ電気エネルギーで比較すると 4 倍以上強度の大きな赤外線が発生したことが報告されている[12]．また，より実用的な方法として，銅の表面に厚さ 100 nm のクロムと酸化クロムの薄膜を形成した場合に，発光効率が改善したことが報告されている[10]．今後，波長広がりや効率性等の点で従来とは全く異なる熱放射光源が実用化されれば，熱放射という現象についての認識も変

---

*10)　単位波長あたりの強度がピークとなる波長は $\lambda_{\max}\sim hc/(4.965kT)$ である．単位振動数あたりの強度がピークになる振動数は $\nu_{\max}\sim 2.82kT/h$.

わってくるかもしれない．

5. おわりに

アメリカ航空宇宙局（NASA）は，2010年1月に，ウィルキンソン・マイクロ波異方性探査機（Wilkinson Microwave Anisotropy Probe; WMAP）の7年間にわたる観測により得られたデータを発表した．図3は，その一つ，全天の宇宙背景放射の温度分布の測定結果である[13]．宇宙背景放射は，1964年にアメリカ合衆国ベル研究所のアーノ・ペンジアスとロバート・ウィルソンによって発見されたもので，全天のどの方向からも観測される温度2.725 Kの黒体輻射である[*11]．この宇宙背景放射の振動数分布は，式(6)のプランクの輻射公式と非常に高い精度で一致することが確かめられている．図3は，その宇宙背景放射のわずかな温度むらの測定データである[*12]．この図では，温度が高い方向は白く，温度が低い方向は黒く表されている．濃淡のスケールは ±0.0002 K であり，驚嘆すべき精密なデータである．これらの測定データを，理論モデルと比較することにより宇宙の成り立ちに関する詳細な知見が得られており，冒頭で述べた暗黒物質と暗黒エネルギーの構成割合など，私たちの自然観に変革を迫るものである．

WMAPは2010年10月に科学観測を終えたが，その後継となるPlanckが2009年8月から観測を継続している[14]．Planckは，WMAPよりも高感度・高空間分解能の観測装置を搭載しており，宇宙背景放射の偏光などについて新しい知見をもたらすことが期待されている．1900年に当時の最先端の黒体輻射の観測結果を聞いたマックス・プランクが，その精密データを説明しようと格闘する中で量子論が生まれ，私たちの世界を変革した．そして今，宇宙背景放射の精密観測結果は，自然に対する私たちの理解を変革しようとしている．これら100年を隔てた2つの変革が，同じ黒体輻射という現象に関わるものであることは，興味深いことであると思われる．

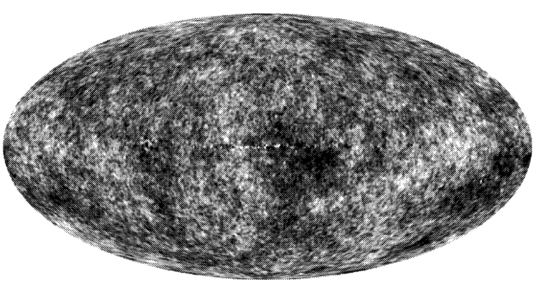


図3　全天の宇宙背景放射の温度分布．

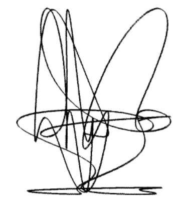
*11）ピーク振動数は 160 GHz（波長 1.9 mm）．
*12）私たちの銀河からの放射の寄与は取り除かれている．

参考文献

1) The laws of radiation and absorption; memoirs by Prévost, Stewart, Kirchhoff, and Kirchhoff and Bunsen, translated and edited by D.B. Brace, American Book Company (1901); http://lccn.loc.gov/02001086
2) Abraham Pais: "Subtle is the Lord..." The Science and the Life of Albert Einstein, Oxford Univ. Press, (1983); 西島和彦監訳による日本語訳が産業図書から出版されている．
3) James Clerk Maxwell: A dynamical theory of the electromagnetic field, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **155**, 459–512 (1865); doi:10.1098/rstl.1865.0008
4) 上記文献 1), p.75.
5) 天野清：『熱輻射論と量子論の起源』, 大日本出版 (1943); http://kindai.da.ndl.go.jp/info:ndljp/pid/1063572
6) 田崎晴明：『統計力学 I』，培風館 (2008).
7) ノーベル財団：The Nobel Prize in Physics 1918, http://www.nobelprize.org/;『ノーベル賞講演　物理学 3』，1918 年（河邊六男訳），講談社 (1980).
8) 江沢洋：『現代物理学』，朝倉書店 (1996).
9) J.J. Greffet, *et al.*: *Nature* **416**, 61 (2002).
10) Takahiro Matsumoto and Makoto Tomita: *Optics Express*, **18**, A192 (2010).
11) K. Ikeda, *et al.*: *Appl. Phys. Lett.* **92**, 021117 (2008).
12) Menaka De Zoysa, *et al.*: *Nature Photonics*, **6**, 535 (2012).
13) http://map.gsfc.nasa.gov/news/
14) http://www.esa.int/SPECIALS/Planck/
宇宙探査機 Planck の名前は，もちろん，輻射公式を導いて量子論の扉を開いたマックス・プランクからとられたものである．

（ひらの・たくや，学習院大学理学部）

ホログラフィー



志村　努

1. はじめに

ホログラフィーといえば，立体画像，3 次元画像の記録再生技術である，ということをご存知の方は多いだろう．3 次元画像という観点からみると，ホログラフィーの特徴は以下のようになることも，ある程度知られていると思われる．まず鑑賞時に特殊なメガネをかける必要がなく，裸眼で **3 次元画像**が観察できる．また，単に奥行き感があるだけでなく，観察方向を変えると，それに伴って連続的に画像の見える角度が変わってくる．

例えば，一つの面が正面を向いた立方体の像がホログラムに記録されているとする．正面から見ると正対した面だけ見えて側面は見えない（図 1 (a)）．この状態から頭を右に動かして視点を変えると，右側側面が見えてくる（図 1 (b)）．逆に視点を左に動かすと左側側面が見える（図 1 (c)）．同様に視点を上に動かせば上面が（図 1 (d)），下に動かせば下面が（図 1 (e)）見える．つまりホログラフィーによる 3 次元画像は，その場に 3 次元の実物があるのと同じ見え方をするのである．

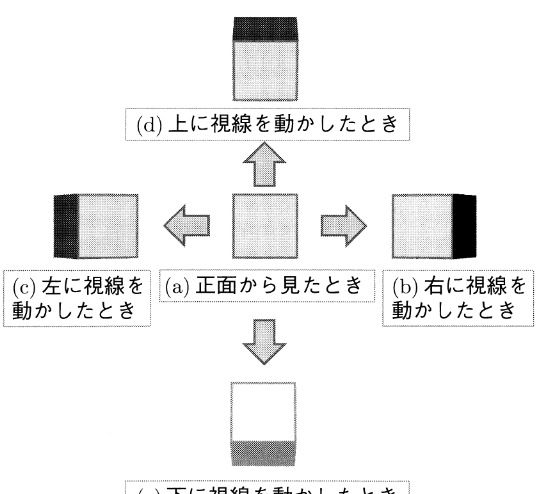


図 1　ホログラフィーの再生像の見え方．

最近はやりの 3D 映画や携帯電話の 3D 画像は古くからあるステレオ写真と同じく，左右の目の観察方向の差（両眼視差）による見え方の違いを使っている．これだと奥行き感は十分に感じられるが，いくら頭を動かして視点を変えても物体の見え方は変わらない．例えばサイコロならばいくら視点を左右に振っても側面は見えてこない．この点がホログラフィーがステレオ画像と比べてより完全な 3 次元画像であるといわれるゆえんである．

おそらく最も身近にあるホログラフィーは，偽造防止の目的で 1 万円札に刷り込まれたものだろう．幸いにして今財布の中に 1 万円札が入っている方は見ていただきたい．福沢諭吉の面の左下の位置に楕円形のキラキラしたシールのようなものがある．これが**ホログラム**である．このホログラムは 3 次元画像を作り出してはいないが，視点を変えると像の見え方が変わる．お札の向きをいろいろ変えてみると，「10000」の文字，桜の花，日本銀行の行章が入れ替わりながら現れる．視点を変えて別の絵が見えるということと，上記の視点を変えてサイコロの側面が見える，という性質は同じ原理に基づいている．

では，なぜホログラフィーは完全な 3 次元画像を作り出すことができるのか．その仕組みはなかなか面倒である[1, 2]．ここではこの原理をできるだけわかりやすく解説していきたい．

2. ホログラフィーの原理

ホログラフィーは1947年にハンガリーのDenis Gaborによって発明された[3]．彼はこの発明により，1971年のノーベル物理学賞を受賞している．この発明がレーザーの発明（1960年）以前に行われたということは，驚くべきことである．なぜなら，ホログラフィーは後述するように光の干渉を利用した技術であり，レーザー発明以前は単純な**干渉縞**を作る干渉計でもコントラストの高い干渉縞を作り，それを記録するのはかなり難しいことだったからである．

ひとたびレーザーが登場すると，ホログラフィーの実験はそれまでに比べて著しく容易になった．これはひとえにレーザー光の**コヒーレンス**が高いからである．コヒーレンスの詳しい説明は長くなるので省略するが**可干渉性**，すなわち光の干渉のしやすさということとほぼ同義である[4]．

ここではまずホログラフィーの基本原理について説明する．

2.1 ホログラムの記録

ホログラフィーの記録光学系の例を図2に示す．レーザーから出力されたビームは半透鏡で2つに分けられる．それぞれのビームは1枚あるいは数枚のレンズからなる通して太い平行ビーム，あるいはゆるく広がるビームとする．分けられたビームのうち一つは，撮影する3次元の被写体の照明光として使われる．物体にあたった照明光は，物体表面から散乱される．ここでホログラフィーを記録する媒体を，**散乱光**ができるだけ効率よく到達する場所に置く．この媒体には銀塩感光材料が多く使われるが，必要な機能は，光の強度を光の屈折率あるいは吸収率の変化として記録することであり，このような機能を持った材料ならば使用可能である．実際には**記録媒体**を固定して，照明光と物体の位置を工夫しても良い．ともかく，散乱光が効率よく感光材料に当たるようにしてやる．この散乱光は，**物体光**と呼ばれる．さらに半透鏡で分けられたもう一方の光を，物体光と少し角度をつけて感光材料に当ててやる．この光は**参照光**と呼ばれる．

2つの光が角度をつけて記録媒体内部で交わると，干渉縞ができる．通常は参照光には平面波かゆるい球面波のような，比較的きれいな波面を持った光が使われる．一方物体光は，3次元物体の表面からの散乱光なので，かなり複雑な波面を持っている．この波面こそが3次元物体の形状の情報を持っている．物体光と参照光の干渉により，物体光の複雑な波面に応じた複雑な干渉縞ができる．

干渉縞は記録媒体中に光強度に対して線形な**吸収**の分布，あるいは**屈折率変化**の分布として記録される．この記録された屈折率あるいは吸収の分布，あるいは記録された媒体のことをホログラムと呼ぶ．用語としては，この技術を総称してホログラフィーと呼び，ホログラムとは区別して使用する．

吸収型のホログラムは，吸収による光量の損失が大きく，また回折効率そのものも小さい．そのため実用的には**屈折率変調型**のホログラムが多く使われる．本稿でも以下の話は屈折率変調型のホログラムに話を限定する．

2.2 ホログラムの再生

続いてホログラムの再生について説明する．ホログラフィーの再生は，基本的には記録されたホログラムに対して，記録時と同じ光学系を用いて記録時と同じ参照光を当てることで行う（図3）．再生時の参照光のことを**再生照明光**と呼ぶ．当然ながら再生時には物体光は当てない．すると，ホログラムにより再生照明光は回折され，記録時の物体光と全く同じ波面を持つ光

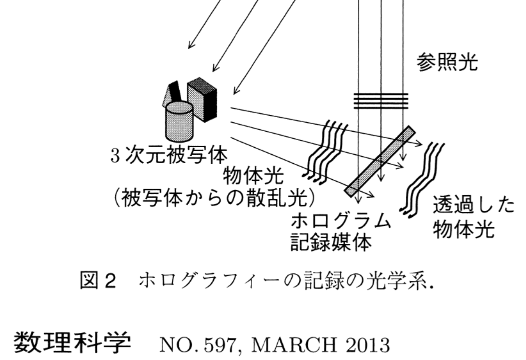


図2　ホログラフィーの記録の光学系．

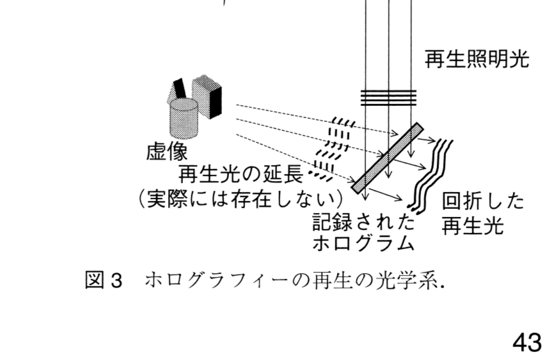


図3　ホログラフィーの再生の光学系．

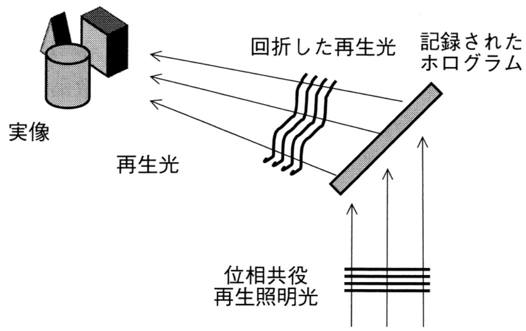


図４　位相共役再生照明光による実像の形成.

(**再生光**) がホログラムの反対側に発生する. 記録時にホログラムよりも物体側にあった光波は再生時には存在しないが, ホログラムから回折されてくる光は, 記録時の物体光と同じである. したがって, この光波を目に入れて観測すると, 記録時に物体から直接散乱されてきた光波と同じなので, 全く同じ被写体が見えることになる. しかも, 空間に広がっている波面の状態が記録時と同じなので, 見る側の視点を変えれば, 3 次元の物体が, 記録時と全く同じに見える.

図 3 の場合は作られる像は**虚像**になるが, ホログラフィーで**実像**を作ることもできる. 図 4 のように, 記録時の参照光と全く同じ波面を持ち逆方向に進行する波を再生照明光としてホログラムを再生すると, 再生光も物体光と全く同じ波面を持ち, 逆方向に進行する波となる. すると再生光は元の物体のあった位置に実像を作る. ただしこの場合, 再生像を図の左側から見ると, 凹凸が逆転してしまうという問題がある. そのため, 本来の凹凸とは逆の物体を用意して, それを物体としてホログラムを記録し, 正しい凹凸を再現する, という方法もある.

以上がホログラフィーの記録と再生の概要である. ここまでの説明で, 平面波どうしの干渉と, 単一周期の 1 次元回折格子による回折に関して知識のある人は, 物体光が平面波であるとすれば, ホログラフィーの記録と再生の仕組みは理解できるだろう. しかし実際のホログラフィーの物体光は, 3 次元物体の表面からの散乱光なので, きわめて複雑な波面を持っている. 一般の物体波の場合のホログラフィーで, なぜこの複雑な波面が再生できるのだろうか. その理屈をこれから説明していこう.

3. 平面波どうしの干渉と回折

3.1 平面波どうしの干渉

複雑な波面の記録と再生を考える前に, その準備として, 平面波どうしの干渉と回折に関して復習しておく.

光は本来**ベクトル波**であるが, 多くの場合**スカラー波**として扱っても十分に良い近似となる. ホログラフィーでは, 物体波と参照波の偏光状態が異なる場合など, ベクトル波として扱う必要の生じる場合もある. その場合でもスカラー波での理論を基本にベクトル波に拡張することができるので, 本稿ではスカラー波近似に話を限定して説明する.

平面波は以下のような式で表すことができる.

$$u(\boldsymbol{r}, t) = A_0 \exp\left(i\left[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta\right]\right). \tag{1}$$

ここで, A_0 は光の場 (電場) の振幅, $\boldsymbol{k}$ は光の**波数ベクトル**, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は位置の座標, ω は光の角振動数, δ は初期位相, t は時刻である. 波数ベクトルは, 光の波長 λ と,

$$|\boldsymbol{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2}$$

という関係がある. また $\boldsymbol{k}$ は波面法線の方向を向いているが, このことは, 式 (1) をじっと見ているとわかる.

式 (1) で物理的に意味のあるのは実部,

$$\mathrm{Re}\left[u(\boldsymbol{r}, t)\right] = A_0 \cos\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \delta\right) \tag{3}$$

だけである. 虚部には意味はない. ただ, 複素表示によって微分積分, 乗除等種々の計算が楽になる. また, 初期位相と実数の振幅をまとめて複素振幅として,

$$u_0 = A_0 \exp(i\delta) \tag{4}$$

と書くことができ, 表記を単純化できる.

今, 進行方向の異なる 2 つの平面波が同一の空間を進行していたとする (図 5). これらを,

$$\begin{aligned} u_1(\boldsymbol{r}, t) &= u_{10} \exp\left(i\left[\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\right]\right), \\ u_2(\boldsymbol{r}, t) &= u_{20} \exp\left(i\left[\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r} - \omega t\right]\right) \end{aligned} \tag{5}$$

とする. この状態でのトータルの光の場は, 重ね合わせの原理に従って,

$$u(\boldsymbol{r}, t) = u_1(\boldsymbol{r}, t) + u_2(\boldsymbol{r}, t) \tag{6}$$

となる. これは平面波どうしの干渉なので, 光強度の縞模様ができることになる.

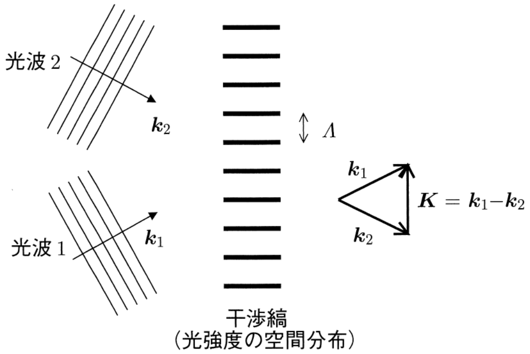


図 5 平面波どうしの干渉と回折格子の書き込み．

光の強度は単位面積を通過する光のパワーである．電磁気学によれば，電磁場のエネルギー密度は，電場のエネルギー密度と磁場のエネルギー密度の和になっている．しかも電場と磁場のエネルギーは等しい．光の場合これに光速度をかければ強度になるのだが，可視光ではこれが数百 THz という高周波で振動しているために，物質と相互作用するときには，物質はその時間平均しか感じない．したがって，光の電場 u に対して，光の強度 I は，光速を v として，

$$I=\varepsilon\left\langle(\mathrm{Re}\,[u])^2\right\rangle v=\frac{\varepsilon}{2}|u|^2 v \qquad (7)$$

となる．ただし $\langle\rangle$ は時間平均を表している．

余談だが，実は物質の磁化は光の周波数で振動する磁場には応答しない．物質が感じるのは電場成分のみである．したがって，光パワーメーターも CCD や CMOS の撮像素子もホログラムを記録する銀塩感光材料もフォトポリマー（光重合性ポリマー）も，光の電場の時間平均に感じている．このことは光をベクトル波として扱う場合には問題になるが，スカラー波近似の範囲では考慮しなくても大丈夫である．

さて，以上に従って式 (6) から光強度を求めると，

$$\begin{aligned}I(\boldsymbol{r}) &= |u_{10}|^2+|u_{20}|^2\\ &\quad +u_{10}u_{20}{}^*\exp\left(i\left[\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2\right]\cdot\boldsymbol{r}\right)\\ &\quad +\mathrm{c.c.}\\ &= |u_{10}|^2+|u_{20}|^2\\ &\quad +2\,|u_{10}|\,|u_{20}|\cos\left(i\left[\boldsymbol{K}_{12}\cdot\boldsymbol{r}+\delta_{12}\right]\right) \qquad (8)\end{aligned}$$

となる．ここで，c.c. は複素共役を表し，

$$\boldsymbol{K}_{12}=\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2,$$
$$\delta_{12}=\delta_1-\delta_2$$

とした．これが 2 つの平面波の結果として現れる平面波の干渉縞であり，$\boldsymbol{K}_{12}$ は干渉縞の波数ベクトルになる．

3.2 回折格子の書き込み

さて，式 (5) の 2 光波に対して，ホログラムの記録媒体が，図 5 のように置かれていたとする．すると，記録媒体中に式 (8) の強度分布に比例した吸収率あるいは屈折率の変化が記録される．

3.2.1 ホログラム記録材料

現在記録材料として多く使われているのは，

- 銀塩感光材料
- フォトポリマー
- フォトリフラクティブ材料

である．銀塩感光材料の場合には，露光→現像→定着→水洗という過程を経て吸収率変化となり，さらに漂白処理を行うと屈折率変化となる．フォトポリマーは初期状態はモノマーで，光が当たった部分がポリマー化し，屈折率が変化する．銀塩材料のような化学プロセスが不要で，光を当てるだけで屈折率が変化する．フォトリフラクティブ材料は，光照射により物質内部で電子または正孔が移動して光強度に応じた電荷分布ができ，その結果生じた電場分布により屈折率が変化する，という材料である．$LiNbO_3$, $BaTiO_3$ などの強誘電体，GaAs をはじめとする III-V 属，および II-VI 属半導体などが代表的なフォトリフラクティブ材料である．これも現像過程は不要で，光を当てるとその場で屈折率が変化する．

銀塩とフォトポリマーでは一度書き込まれた回折格子は書き換えができないが，フォトリフラクティブ材料は書き換えが可能である．記録感度は銀塩，フォトポリマー，フォトリフラクティブ材料の順に高い．なぜなら，銀塩とフォトポリマーでは，吸収された光子 1 個あたりで反応する分子数が数千から数万個であり，増幅作用を持っているのに対し，フォトリフラクティブ材料では，光子 1 個で動く電子（正孔）の数はたかだか 1 個だからである．

3.3 回折格子の読み出し

さて，次が書き込まれた平面波の読み出しである．ここで，書き込み時の平面波のうちの片方，$\boldsymbol{k}_2$ 方向に進む平面波を式 (8) に比例して吸収率あるいは屈折率の変化したホログラムに照射すると，回折により式 (5) のもう一方，$\boldsymbol{k}_1$ 方向に進行する平面波が再生される．ホログラフィーとしてみると，$\boldsymbol{k}_2$ が書き込み時に

は参照光，再生時には再生照明光，$\boldsymbol{k}_1$ が書き込み時には参照光，再生時には再生光となる．

図 5 に示したホログラム記録媒体は，厚さが厚い場合と薄い場合で回折光の様子が異なる．

回折格子が厚いか薄いかは，Klein–Cook パラメーター，

$$Q = \frac{2\pi\lambda L}{n\Lambda^2} \tag{9}$$

が 1 より大きいか小さいかで大別され，$Q \gg 1$ のときが厚い，$Q \ll 1$ のときが薄いホログラムとなる．ここで，L は回折格子の厚さ，n は記録媒体の平均屈折率，Λ は回折格子の周期で，回折格子の波数ベクトル $\boldsymbol{K}$ と，

$$|\boldsymbol{K}| = \frac{2\pi}{\Lambda} \tag{10}$$

という関係がある．

3.3.1 薄い回折格子の場合

薄いホログラムによる回折は，**Raman–Nath 回折**と呼ばれる．この場合は，再生照明光は書き込み時と同じ方向である必要はない．例えば，波数ベクトル $\boldsymbol{K}$ の薄い回折格子に垂直に波数 k の平面波を当てると，m を整数として，図 6 に示すように，

$$mK = k\sin\theta_m$$

を満足する方向 θ に多数の回折光が発生する．

3.3.2 厚い回折格子の場合

厚いホログラムによる回折は，**Bragg 回折**と呼ばれ，2 つの平面波で書き込んだ回折格子の波数ベクトル $\boldsymbol{K}_{12}$ に対して再生照明光の波数ベクトルが $\boldsymbol{k}_1$ または $\boldsymbol{k}_2$ と一致していないと再生光は発生しない．Bragg 回折による回折の効率は，Kogelnik の理論[5)]，または Born 近似[6)]を用いて計算できる．その結果によれば，回折効率は回折格子の屈折率変調の振幅の 2 乗に比例し，また回折格子の厚さ L の 2 乗に比例する．

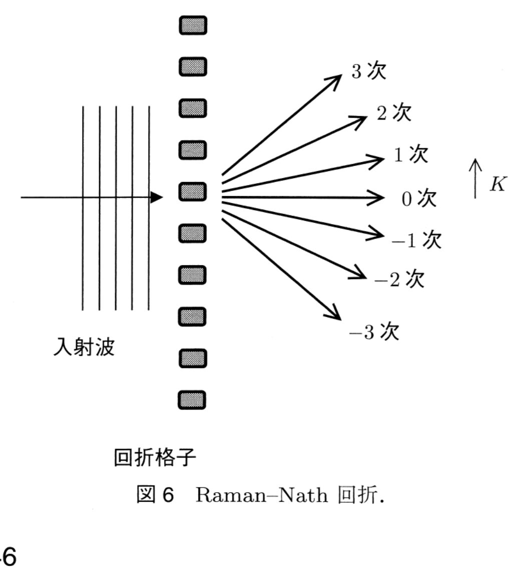


図 6　Raman–Nath 回折．

4. 複雑な波面の物体波の記録と再生

4.1 一般の波面の平面波による展開

さて，いよいよ一般の複雑な波面を持つ物体波がホログラフィーによって記録再生できる仕掛けを考える．一般の波面を持つ光の場を，$u_s(\boldsymbol{r}, t)$ とする．この波は，図 2 に示されているようなレーザー光によって照明された 3 次元物体からの散乱光である．この光は，物体表面の各点から球面波が出てきていると考えることもできるが，ここでは全く同じものを，ホログラムの記録媒体の内部の位置で，平面波の重ね合わせとして表す．

一般の波は，平面波の重ね合わせとして，

$$u_s(\boldsymbol{r}, t) = \int_{\boldsymbol{k}} U_0(\boldsymbol{k}) \exp(i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t])\, d\boldsymbol{k} \tag{11}$$

と書くことができる．ここで，$U_0(\boldsymbol{k})$ は各 $\boldsymbol{k}$ 方向に伝搬する平面波成分の振幅である．図 2 からわかるように，$\boldsymbol{k}$ の範囲は，物体からホログラム記録媒体を見込んだ角度の範囲内になっている．この式は 3 次元のフーリエ変換の形をしているので，係数 $U_0(\boldsymbol{k})$ は $u_s(\boldsymbol{r}, t)$ の逆フーリエ変換で求められる．

ここで，この先の説明をわかりやすくするために，式 (11) を和の形に書き換え，

$$\begin{aligned} u_s(\boldsymbol{r}, t) &= \sum_j U_0(\boldsymbol{k}_j) \exp(i[\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r} - \omega t])\, \boldsymbol{\Delta k}_j \\ &= \sum_j u_j(\boldsymbol{r}, t) \end{aligned} \tag{12}$$

とする．参照光を平面波とし，

$$u_r(\boldsymbol{r}, t) = u_{r0} \exp(i[\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r} - \omega t]) \tag{13}$$

とすると，書き込まれるホログラムは，

$$|u_r(\boldsymbol{r}, t) + u_s(\boldsymbol{r}, t)|^2 \tag{14}$$

に比例した屈折率 (吸収率) 変化となる．これに式 (12) を代入すると，

$$\left|u_r + \sum_j u_j\right|^2 = |u_r|^2 + \sum_j |u_j|^2$$

$$+u_r \sum_j u_j^* + u_r^* \sum_j u_j \quad (15)$$

となる．ここで，物体光を構成する平面波どうしの干渉は，大きさが小さいことと，再生時に Bragg 回折の波数ベクトルの条件を満たさないことから省略した．

式 (15) を見ると，$\boldsymbol{K}_{rj} = \boldsymbol{k}_r - \boldsymbol{k}_j$ として，

$$u_r u_j^* = u_{r0} U_0 (\boldsymbol{k}_j) \Delta \boldsymbol{k}_j \exp [i \boldsymbol{K}_{rj} \cdot \boldsymbol{r}] \quad (16)$$

であることから，干渉縞の強度分布が，参照光である平面波と，物体光を構成する多数の平面波の一つ一つとの平面波どうしの干渉縞の和で表されていることがわかる．これによって書き込まれるホログラムの屈折率分布も式 (15) に比例するので，ホログラムも同様に，波数 $\boldsymbol{K}_{rj}$ を持つ平面回折格子の重ね合わせとなる．

再生時には，このホログラムに参照光 u_r が当たるので，ホログラムが厚くても薄くても，各 $\boldsymbol{K}_{rj}$ の要素平面波回折格子からそれぞれ平面波 u_j に比例する平面波が回折される．それらの重ね合わせを取ると，

$$\sum_j u_j (\boldsymbol{r}, t) \quad (17)$$

に比例する波になる．これは式 (12) そのものである．

以上が複雑な波面がどのような形でホログラムとして記録され，再生されるか，ということの理屈である．

ここでの説明は，参照光が単純な平面波の場合だった．参照光が平面波でない場合は，参照光も物体光と同様に平面波の重ね合わせとして展開し，全く同じ理屈で，最終的に物体光と同じ再生光を作り出すことができることを示すことができる．

5. 白色光再生ホログラム

以上の説明は再生照明光に，書き込み時と同じ波長のレーザー光を用いるという前提で行ってきた．しかし実用上は，再生時にはレーザーではなく，白色光で再生するほうが便利である．しかし図 2 のような配置で，参照光と物体光がホログラム記録媒体の同じ面から入射する場合には，再生照明光を白色光にすると，薄いホログラムでは波長によって回折光の出る方向が異なって大きな色収差が出て像がぼけてしまう．

ところが，図 7 のように物体光と参照光を記録媒体の反対の面から入射させてやると，記録される回折格子が面に平行に近くなり，厚さ 10 μm 程度の媒質でも Bragg 回折の条件 $Q \gg 1$ を満足する．すると，回折

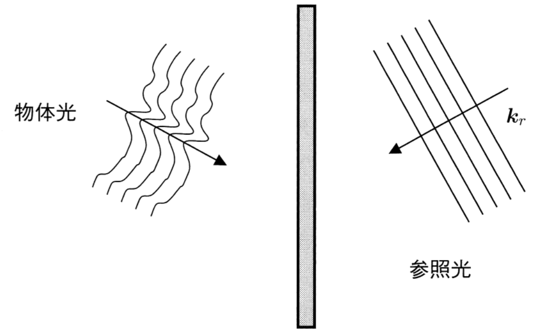


図 7　ホログラム．

格子に波長選択性が生じ，白色光を再生照明光としても，特定の波長だけが開設され，シャープな像を結ぶことができる．

さらに，書き込み時に赤，青，緑の 3 原色のレーザーを用いて各色のホログラムを重ね書きすると，白色光再生時に 3 色の像が再生され，カラー画像の再生光を得ることができる．

このようなホログラムを，同様の原理での 3 原色写真を考案した Gabriel Lippmann の名前を取って Lippmann 型ホログラムと称している．現在我々の目に触れる，現物と見まごうばかりの鮮明な像を結ぶ白色光再生ホログラムは，ほとんどがこの Lippmann 型ホログラムである．

白色光再生ホログラムには Lippmann 型以外にもレインボーホログラムなどいくつか方式があるが，これらは文献 1) を参照されたい．

6. 系の一部を計算に置き換えたホログラフィー

さて，以上は光の干渉を用いてホログラムを書き込み，光の回折を用いて再生するホログラフィーだったが，記録あるいは再生に光を用いず，計算で求めるというタイプのホログラフィーがある．記録の部分を計算で行い，ホログラムを人工的に製作するタイプを計算機ホログラムと言い，ホログラムの書き込みのための干渉縞の形成は光で行うが，その光強度の分布を撮像素子で取り込み，ディジタル化して記録し，もしその干渉縞で書き込まれたホログラムが実在し，それを回折により再生したら，どのような像が再生されるかを計算によって求める，というのがディジタルホログラフィーである．

6.1 計算機ホログラム

計算機ホログラムは，ある再生照明光に対して，所望の再生光を得るホログラムを計算により求める方法である．通常は，ホログラムとして人工的に製作できる媒体で制御できる光のパラメータ（振幅，位相等）に制限がある．例えば通常の液晶ディスプレイは画素ごとの光強度のみ制御できる．また液晶ディスプレイと同様の画素構造を持ち，画素ごとに光の位相を制御できる液晶空間位相変調器，半導体リソグラフィー技術を用いて微細な表面形状を形成して厚さの違いによる光路長差によって位相を変調する素子，印刷技術を用いて作った表面の凹凸によって反射光の位相を制御する素子，などは位相のみ制御でき，振幅は一定である．

このため，通常の計算機ホログラムの設計は，まずホログラムとして使用できる素子の制約条件を与えた上で，再生光がホログラムから一定距離伝搬後に作ってほしい光の振幅分布あるいは強度分布を与えて，試行錯誤的な繰り返し計算によってホログラム面上での振幅分布を求めることが多い．とりあえずホログラム面上での何らかの光分布を与えて，それによって作られる像を計算し，あとは繰り返しによる最適化計算で，徐々に所望の像を与えるホログラムに近づけていく，ということになる．

いまのところ，厚いホログラムを人工的に作る方法はないので，薄いホログラムに限定されている．また，作製できる素子の制約も大きいが，計算機ホログラムを用いると，純粋に光学的に作り出すのが難しい波面，例えば任意の 3 次元的な位置に微小なスポットを作ったり，らせん状の波面を持つ，いわゆる Laguerre–Gauss ビームなどが自由に作れる，というメリットを持つ．また，回折光学素子（Diffractive Optical Element）と呼ばれる素子も原理的には計算機ホログラムと同じという見方もできる．

6.2 ディジタルホログラフィー

計算機ホログラムが物体光と参照光の干渉というプロセスを省略して直接ホログラムを求めるのに対して，物体光と参照光の干渉は実際に光学的に行い，これにより作られた干渉縞を撮像素子等で計測し，得られた干渉縞情報から再生像を計算によって求める，というのがディジタルホログラフィーである．応用としては，再生像を計算するというよりは，元の物体の形状等の情報を求める，一種の計測法として用いられることが多い．3 次元形状の精密計測，光強度的には一様な対象の屈折率分布の計測などに応用できる．干渉縞から形状を求めるという意味では一種の干渉計測であり，実際，縞操作法などの干渉計測の手法が使われている．

計算機ホログラムが歴史も古く，比較的成熟した技術であるのに対して，ディジタルホログラフィーは現在発展中の新しい技術である．

7. まとめ

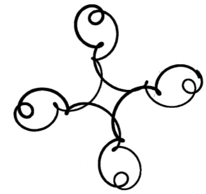
以上，限られたスペースではあったが，ホログラフィーによって 3 次元物体からの散乱光という複雑な波面がどのように記録され，再生されるか，ということに関してその概要を解説した．ここで触れられなかった話題，例えばレインボーホログラムなど薄いホログラムで白色光再生を行う方法，エンボスホログラムなど印刷技術でホログラムを作成する方法，など様々な技術に関する話題，また，物体光の偏光状態が一定でない場合のホログラムの記録，再生など，ベクトル波理論を用いる必要のある場合などまだまだ興味深い話題は多くある．これらに関する話題は参考文献あるいは最新の論文を参照していただきたい．

参考文献

1) 久保田敏弘，『新版　ホログラフィ入門—原理と実際』（朝倉書店，2010）．
2) 辻内順平，『ホログラフィー』（裳華房，1997）．
3) D. Gabor, A New Microscopic Principle, *Nature*, **161**, 777–779 (1948).
4) M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics 7th Ed.* (Cambridge University Press, 1999).
5) H. Kogelnik, Coupled wave theory for thick hologram gratings, *The Bell System Technical Journal*, **48**, 2909–2747 (1969).
6) H.J. Coufal, D. Psaltis, G. Sincerbox, eds., *Holographic Data Storage* (Springer Verlag, 2000).

（しむら・つとむ，東京大学生産技術研究所）

光渦と角運動量



宮本 洋子

1. はじめに

1992年，Allenらによって，光軸周りの方位角 ϕ に対する依存性が整数 m を用いて $\exp(\mathrm{i}m\phi)$ で与えられる光ビームが1光子あたり $m\hbar$ の「**軌道角運動量**」を持つことが指摘された[1)]．これにより，角運動量の起源となるポインティングベクトルの渦構造やその中心にある**位相特異点**にも注目が集まり，現在も活発な研究が行われている．関連する現象は多岐に渡り，最近のものだけでも多くの解説が書かれている[2~6)]．本稿ではその中から，「目で感じられる」現象とその応用を中心に紹介したい．

2. ラゲールガウスビーム

軌道角運動量を持つ代表的な光ビームに**ラゲールガウス（LG）ビーム**[7)]がある．このビームを例に，**光渦**と角運動量，位相特異点と振幅の消失について簡単に紹介しよう．

単色かつ単一の偏光状態の光波の空間分布は，ヘルムホルツ方程式で与えられる．

$$(\Delta + k^2)\psi = 0. \tag{1}$$

ここで主として z 方向に伝搬する光波を考え，$\psi = \tilde{\psi}\exp(\mathrm{i}kz)$ とおく．$\tilde{\psi}$ の z 方向の変化は緩やかであると仮定すると，下記の近似式が得られる．

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} + 2\mathrm{i}k\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

この近似は ψ が z 方向およびそれに近い方向に伝搬する平面波から構成されるとすることに相当し，**近軸近似**と呼ばれる．

LGビームは(2)式を円筒座標系 (ρ, ϕ, z) で変数分離して得られる解であり，次式で与えられる．

$$\tilde{\psi} = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|m|)!}}\left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w}\right)^{|m|} \mathrm{L}_p^{|m|}\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right) \cdot\frac{1}{w}\exp\left[-\rho^2\left(\frac{1}{w^2} - \frac{\mathrm{i}k}{2R}\right) + \mathrm{i}m\phi - \mathrm{i}\Phi\right] \tag{3}$$

ここで $\mathrm{L}_p^{|m|}(x)$ はラゲール陪多項式である．p は動径方向, m は方位角方向のモード指数であり, $p = m = 0$ の場合がよく知られたガウスビームである．ビーム径パラメター $w(z) = w_0\{1 + (z/z_\mathrm{R})^2\}^{1/2}$ と**波面曲率** $R(z) = z\{1 + (z_\mathrm{R}/z)^2\}$ とに従ってビーム断面内の分布を相似に保ったまま収束・発散することが特徴であり，w_0 が集光位置でのビーム径パラメター，レイリー長 $z_\mathrm{R} = \pi w_0^2/\lambda$ が集光されている範囲の目安となる．集光位置の前後で平面波との位相ずれ $\Phi = (2p + |m| + 1)\arctan(z/z_\mathrm{R})$ を持ち，Gouy 位相と呼ばれる．

図1に $m = 1$ のLGビームの強度分布と位相分布の例を示す．まず最初に目に付くのは，ガウスビームと違って中心が暗いドーナツ状の強度分布になっていることである．モード指数 p は動

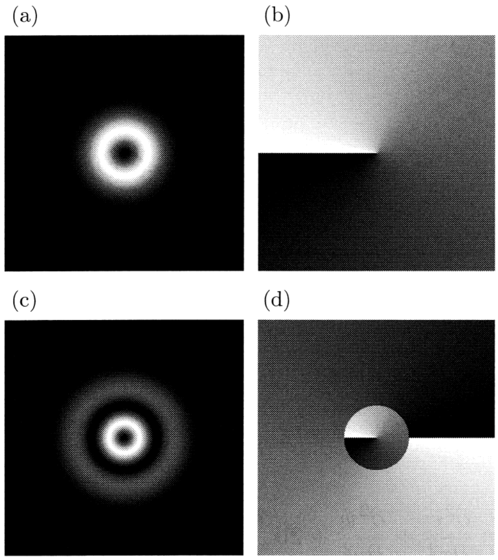


図 1　ラゲールガウスビームの強度分布（左）と位相分布（右）．上段が m=1, p=0，下段が m=p=1 のビームの集光位置の断面．位相は黒から白が $= -\pi \sim \pi$ を表す．

径方向のノード数を表すので，この値が増えると2 重，3 重，…のドーナツになっていく．中心が暗い強度分布は LG ビームに限らず**回転位相因子** $\exp(\mathrm{i}m\phi)$ を持つビームに共通の特徴であり，一般に**ドーナツビーム**と呼ばれる．

次に位相分布を見ると，光軸の周りを左回りに回転するにつれて一定の割合で位相が増大することが分かる．これは m の符号が正であるからで，負の場合は逆に減少する分布になる．一般に波動は等位相面に垂直，つまり位相勾配の方向に伝わるので，上述の位相分布はビーム断面内に光軸の周りを回転するエネルギーの流れ（光渦）があることを示している．これにより，ビームは伝搬方向に m に比例する角運動量を持つことになる．光軸の周りを一周することで得られる位相の変化は $2m\pi$ なので，複素場 $\tilde{\psi}$ が連続であるためには m が整数である必要がある．$\tilde{\psi}$ の不連続を許容すれば m が整数でない分布を一時的に作り出すことは可能だが，LG ビームのように安定な形状を持って伝搬するビームにはならない．

光軸上の点は位相が定まらない点となり，位相特異点と呼ばれる．位相特異点の周りを一周することで得られる位相の変化を 2π で割ったもの（上述の m）が**位相特異点の次数**あるいは **topological charge** である．位相が定まらないということは電場や磁場がどの向きに振れるべきか分からないということであり，そこでは振幅が 0 になる．これが強度分布の中心にある暗い穴の正体である．

これらの現象は光に固有なものではなく，電子波[8]や音波[9]等でも同様の形状を持つビームが作られている．液体ヘリウム中の渦糸はよく知られているが，冷却原子の集団励起に回転位相因子を書き込んだり，それを光で読み出したりすることも可能である[10]．

3. 位相特異点と振幅の消失

位相特異点に伴う振幅の消失を目で確認するのは比較的簡単である．可視光の場合は光の通り道に適当なスクリーンを置けば暗い点として観察できるし，赤外光や紫外光の場合は（もちろん可視光も）CCD カメラ等で観察すればよい（図 2）．光が弱い場合は中心の比較的広い範囲が暗く見えるが（図 2 (a)），光量を上げていけば振幅が真に 0 になるのは中心のほぼ 1 点のみであることが分かる

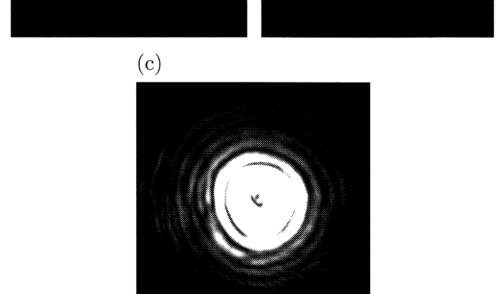


図 2　CCD カメラによる位相特異点を持つビームの観察．上段：$m = 1$，(a) 強度小，(b) 強度大．下段：$m = -2$，(c) 強度大．

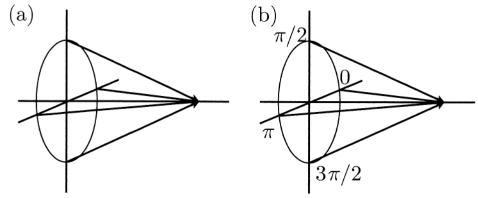


図 3　光軸から等距離の円上から発する 2 次波の光軸上の光波への寄与．(a) 円上の点は光軸上の任意の点から等距離にあるので，位相がそろっている場合は強め合う．(b) 回転位相因子が存在する場合は弱め合って光軸上の振幅は 0 となる．

(図 2 (b))．$|m|>1$ の高次の位相特異点は一般に不安定で，収差等のわずかな擾乱で $|m|$ 個の $+1$ 次または -1 次の特異点に分裂する（図 2 (c))．

一般に回転位相因子 $\exp(im\phi)$ がない場合に光ビーム中に安定した**暗点**を設けることは難しい．光を円板で遮った後ろにできる輝点（Poisson スポット）は光の波動性を示す現象としてよく知られており，環状のスリットを通った光は中心が明るい非回折ビーム（0 次のベッセルビーム[6)]）となる．このことは Huygens の 2 次波の考え方で理解できる．

図 3 (a) のように光軸から等距離の円上の点から発する 2 次波が光軸上の光波に与える寄与を考えよう．円上の点は光軸上の任意の点から等距離にあるので，円上の各点の位相がそろっていれば，光軸上の点で 2 次波は強め合うことになる．動径方向の入力の分布を工夫すれば，異なる円からの寄与が一時的に光軸上で弱め合うようにすることは可能だが，この条件も伝搬するうちに崩れてしまう．一方，図 3 (b) のように回転位相因子が存在すれば，光軸上では 2 次波は常に打ち消し合い，振幅が 0 となる．

このように位相特異点を伴う暗点は安定で，自由空間内で途切れることのない**暗線**（**渦糸**）を形成する．高次の特異点が分裂したり，逆に統合が起きるケースもあるが，これも「途切れる」わけではない．暗線は無限遠から無限遠へ空間を横切る場合もあるし，閉曲線を形成する場合もある．

上記から分かるように，ドーナツ状の光ビームを作り出すには強度分布をいじるのではなく，回転位相因子を付加することが重要である．ガウスビーム等に位相変調 $\exp(im\phi)$ を適用すれば強度分布の穴は自然に形成される．そのためにまず思い付くのはこの位相変調を透過物体の厚みの分布として加工し（**らせん位相板**），そこへ光を入射する方法である．しかしこのような波長オーダーの厚みの分布を正確に加工することは容易ではなく，不正確な変調はビームの劣化につながる．

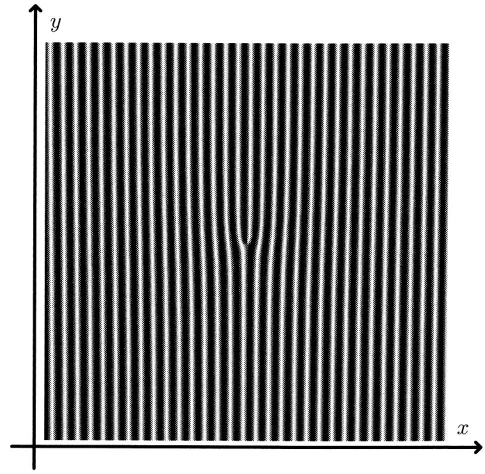


図 4　-1 次回折光に位相因子 $\exp(i\phi)$ を付加するホログラムパターン．

そこで，面内方向の波数 k_x の成分を加えて，次式の位相変調を透過物体（あるいは反射物体）の厚みの分布として実現する方法が一般的である[11)]．

$$(m\phi + k_x x) \quad \mathrm{mod}\ 2\pi. \tag{4}$$

図 4 に $m=1$, $k_x<0$ の場合を示す．基本的な構造はブレーズ状回折格子だが，中心に枝分かれがあることが特徴である．このパターンの場合は -1 次回折光（x の負の方向を負の回折次数と定義する場合）に位相因子 $\exp(i\phi)$ が付加される．厚さ方向の加工の不正確さは他の回折次数へのエネルギーの分散となって現れ，位相変調自体は面内方向の加工で決定される．

最近はこのような静的な**ホログラム**に代わって，液晶を用いた空間光変調器による動的なホログラムが使われることも多くなった．空間光変調器はパソコンにディスプレイとして接続できるように

なっていることが多く，各画素の印加電圧を表示画像の輝度値として指定する．輝度値と位相変調値の関係や装置自体の歪み等の較正結果を表示画像に即座に反映できるため，かなり正確に位相変調を行うことができる．

もう一つの進展は**疑似振幅変調**の適用である．単純に回転位相因子を付加するのではなく純粋なLG ビームを発生させたい場合，位相だけでなく振幅も変調する必要がある．図 4 のパターンで加工深さ，つまり位相変調の幅が理想値 2π からはずれると，目的の回折次数へのエネルギーの分配（回折効率）が低下する．これを逆手に取り，場所によって位相変調幅を変化させることで振幅を変化させることができる．これによって $p > 0$ の良質なビームも発生させることが可能となった[12)]．

回転位相因子の付加による暗点形成の重要な応用の一つに**コロナグラフ**がある．太陽系外惑星の探索が最近注目を集めているが，惑星は当然ながら恒星の近傍にあり，しかも恒星に比べてかなり暗いため，通常の観察では恒星からの光に隠れてしまう．この恒星からの光を取り除く仕組みがコロナグラフであり，様々な提案が行われている．回転位相因子を用いたコロナグラフでは，恒星像の位置に中心を合わせたらせん位相板を用いる[13)]．恒星からの光は中心が暗いドーナツ状となり，一方，惑星からの光はらせん位相板の中心から外れた位置を透過するため，中心が明るい分布のままである．この分布の違いを利用して空間フィルタを適用し，惑星からの光を分離する．

暗点は**蛍光顕微鏡**の空間分解能を上げる手段としても用いられている[14)]．蛍光顕微鏡では励起された蛍光物質の発光を観察するが，空間分解能は通常，波長と対物レンズの開口数に制約される．ここで，蛍光物質を励起した後に蛍光波長に近いドーナツ状の強い光を照射し，観察位置の周辺の蛍光物質を誘導放出によって発光させてしまう．これにより，ドーナツ状の光の強度が 0 となる中心付近のごく狭い領域にだけ励起された蛍光物質が残り，その発光を観察することによって波長の 1/10 前後の高い分解能を得ることができる．

4. 回転する位相分布と光渦

暗点の観察に比べて，回転位相因子 $\exp(im\phi)$ を目で感じるには一工夫必要である．位相分布の確認には，光の干渉が基本的な手段となる．回転位相因子を持つ光と平らな波面を持つ光を 1 対 1 で重ね合わせると，次式に比例する強度分布が得られる．

$$\frac{|\exp(im\phi)+1|^2}{2} = 1+\cos(m\phi). \tag{5}$$

この干渉パターンは方位角 ϕ に従って明暗が $|m|$ 回繰り返す分布になっており，中心から $|m|$ 本の暗い筋が放射状に出るパターンとなる．位相特異点の次数 m の絶対値は分かるが符号は判別できない．

実際の実験では (5) 式のような放射状の干渉縞が得られることは稀で，中心からの暗い筋は図 5 のように曲がって見えることが多い．これは被測定光（回転する位相分布を持つ光）と参照光の波面の曲率が異なるためで，このことを利用して m の符号を判別できる．回転位相因子を持つ光が動径方向に変化する位相 $\theta(\rho)$ を持つとき，干渉パターンは次式となる．

$$1+\cos[m\phi+\theta(\rho)]. \tag{6}$$

この干渉パターンは，暗い筋が観察される方向が ρ の値によって $-\theta(\rho)/m$ だけ回転するパターンとなる．図 5 の場合は回転位相因子を持つビームが参照光に対して発散している（$d\theta/d\rho \geq 0$）ことが分かっている．一方，暗い筋は外側に向かうにつれて正の方向に回転しているので，m の符号は負であることが分かる．

より多く用いられる手法は，参照光を被測定光に対して傾ける方法である．参照光を横方向に傾けて波数 k'_x を持たせると，干渉パターンは下記となる．

$$1+\cos[m\phi-k'_x x]. \tag{7}$$

図 6 に $m=-3$, $k'_x > 0$ の場合を示す．図 5 で中心から等方的に伸びていた 3 本の縞は，図 6 では中心から下方への 3 本の枝分かれに変換されてお

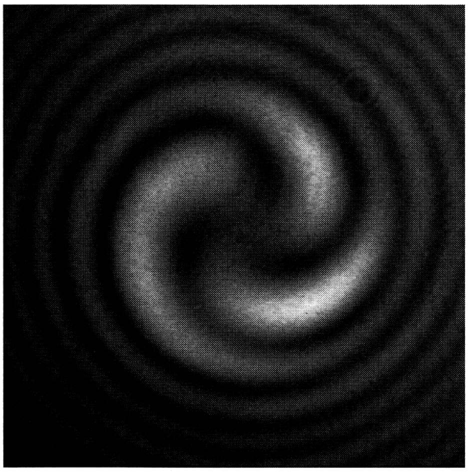


図5 $m=-3$ の回転位相因子を持つビームとガウスビームの干渉パターン（実験）．

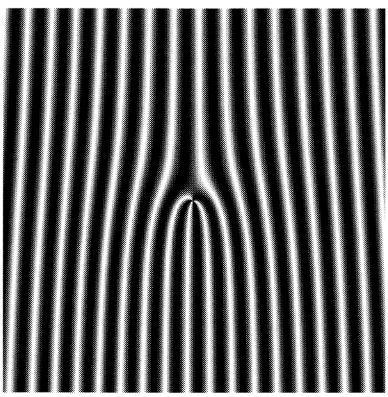


図6 $m=-3$ の回転位相因子を持つビームと右方向にやや傾いて伝搬する平面波の干渉パターン（シミュレーション）．

り（枝分かれの結果全体では上方で１本だった縞が下方では４本となる），中心から離れた位置では横方向に変化する正弦波の特徴が現れている．回転位相因子の位相勾配と参照光の波数 k'_x が逆向きとなる画面下方で干渉縞の間隔が狭くなり，この方向に枝分かれが現れる仕組みである．

図６のような干渉縞から被測定光の詳細な位相分布を取り出す方法は，**光を使った物体計測**の分野でよく研究されている．その一つであるフーリエ変換法[15]を用いて実験的に求めた位相分布の例を図７に示す．$-\pi$ と π の境界部分が曲がっているのは図５と同様に波面の曲率によるものであり，周辺部分のノイズは光強度がほぼ０の（もともと位相の情報がない）部分である．

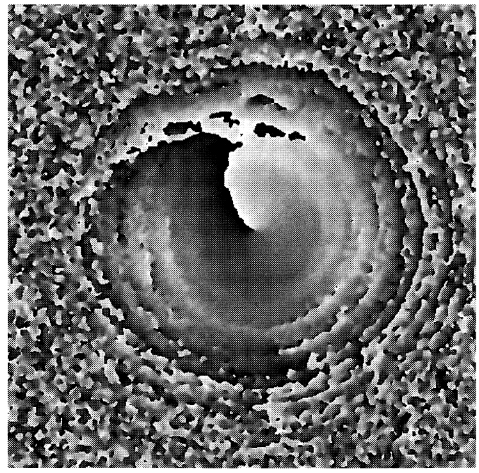


図7 干渉縞から求めた $m=1$ の回転位相因子を持つビームの位相分布．黒から白が $=-\pi\sim\pi$ を表す．

位相特異点の次数が ±1 のときは，ちょっとした工夫を用いてここから位相特異点近傍の位相分布をさらに詳しく求めることが可能である．(3) 式は $m=\pm1$ のとき原点近傍で，ビーム断面内で一定の値持つを係数を除いて下記のように近似できる．

$$\tilde{\psi}\sim\rho\exp(\pm\mathrm{i}\phi)=x\pm\mathrm{i}y. \qquad (8)$$

これは位相特異点の近傍で複素場の実部および虚部はそれぞれ一定の勾配を持った滑らかな分布となることを示している．実験で求めた複素場からこの滑らかな実部・虚部を求め，その両方が０になる点を求めることによって，画素間隔よりも高い精度で位相特異点の位置を決定することができる[16]．

文献 16) では，上述の方法を用いて**スペックル場**中の光渦の統計的な性質を調べている．スペックル場はランダムな凹凸を持つ粗面で散乱されたレーザー光が作る複雑な干渉パターンで，多くの光渦を含むことが知られている．これまで見てきた**等方的な光渦**と違って，このようなランダム場は多くの**非等方的な渦**を含む．非等方的な渦では方位角に対する位相の勾配が一様ではなく，周辺の強度分布の等高線も楕円となる．非等方性の目

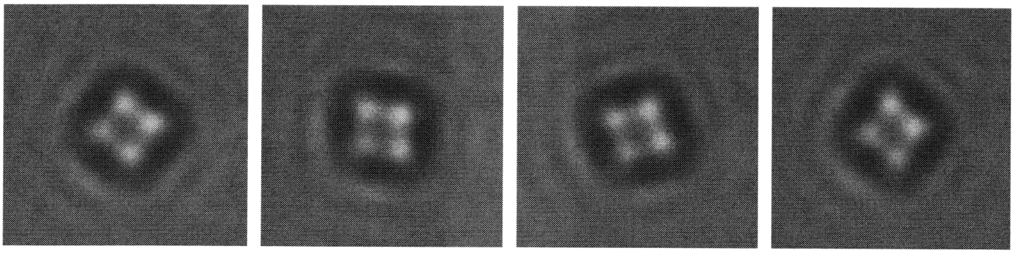


図 8　直線偏光のドーナツビームに捕獲された直径 1 μm のポリスチレン球 4 個が回転する様子．画像間の時間は 39 ms.

安となる楕円率の分布はスペックル場を構成する平面波成分の角度分布と関連していることが理論によって予測され，実験でも裏付けられた．

このような光渦の存在は従来，光計測の分野では障害と考えられてきた．位相特異点の周りを一周する間の位相の変化が有限値となるということは，同じ点に戻ってきても同じ位相にならない，すなわち任意の点の位相値を一意に決めることができないということである．これは物体の形状や移動を干渉縞等の画像から位相の形で取り出す上で厄介な問題となる．

しかし最近，渦構造を複素場中の特徴点として逆に利用しようという動きが出てきている．スペックル場の強度分布のような複雑な画像を複素場に変換し，この複素場の位相（元の光波の位相と区別するために「擬似位相」と呼ぶことがある）分布中の渦を特徴点として用いることで，物体の移動等を検出できる[17]．このような手法を**光渦計測法**と呼ぶ．

5. 角運動量

近軸近似のもとで電磁場の**運動量密度**は下記で与えられる[1]．

$$\boldsymbol{p} = \omega\frac{\epsilon_0}{2\mathrm{i}}(\tilde{\psi}^*\nabla\tilde{\psi} - \tilde{\psi}\nabla\tilde{\psi}^*) + \omega k\epsilon_0|\tilde{\psi}|^2\boldsymbol{e}_z + \omega\sigma\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial|\tilde{\psi}|^2}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\phi. \tag{9}$$

ここで ω は電磁場の角周波数，ϵ_0 は真空の誘電率，σ は偏光状態によって決まる量で左（右）回り円偏光で $+1$（-1），直線偏光で 0 である．方位角 ϕ に対する $\tilde{\psi}$ の依存性が回転位相因子 $\exp(\mathrm{i}m\phi)$ で与えられる場合は，パワー当たりの z 方向の**角運動量密度**は

$$M_z = \frac{m}{\omega}|\tilde{\psi}|^2 + \frac{\sigma\rho}{2\omega}\frac{\partial|\tilde{\psi}|^2}{\partial\rho} \tag{10}$$

となり，ビーム全体の**エネルギー束**あたりの**全角運動量束**は $(m+\sigma)/\omega$ となる．全角運動量のうち純粋に空間分布に起因する m に比例する部分を軌道角運動量，偏光状態 σ に起因する部分を**スピン角運動量**と呼ぶ．

角運動量を目でとらえるには物体の回転運動に変換するのが簡単である．レーザー光を用いて微小物体を捕獲する技術を**光トラップ**または**光ピンセット**と呼ぶが，ドーナツビームを用いて物体を捕獲すると吸収によって光ビームの角運動量が物体に移行し，物体が回転する様子が観察される．直線偏光のドーナツビームで捕獲した物体の回転の様子を図 8 に示す．直線偏光なので純粋に軌道角運動量による回転と考えることができる．円偏光の場合はこれにさらにスピン角運動量の効果が加わる．$m = -3$ のビームで偏光を左回り円偏光，直線偏光，右回り円偏光に切り替える実験では，物体に与えるトルクの大きさがおおよそ 2:3:4 であることが確認されている[18]．また $m = 1$ のビームと右回りの円偏光を組み合わせることによって全角運動量を 0 にし，回転を止めることも可能である[19]．

角運動量に関して重要な注意点が二点ある．一つは，ビーム全体のエネルギー束に対する軌道角運動量束が m/ω で与えられるのはビームの方位角 ϕ に対する依存性が純粋に回転位相因子 $\exp(\mathrm{i}m\phi)$

で与えられる場合だけであり，このようなビームを**軌道角運動量について純粋なビーム**と呼ぶ．一般にはビーム中の位相特異点の次数とビーム全体の角運動量には直接の関係がなく，両者の符号が逆になる場合すら存在する[20]．位相特異点の近傍では位相特異点の次数に比例する回転が支配的だが，これまで見てきたようにこの領域では強度が0に近く，ビーム全体の角運動量への寄与は小さい．運動量密度は(9)式に見るように強度 $|\tilde{\psi}|^2$ に比例する量であり，ビームの明るい部分でどの向きにエネルギーが流れているかが重要である．

二点目は，ビーム断面を横切る正味の運動量がない場合には，ビーム全体の角運動量は原点の取り方によらないということである．これは次式で示されるように，光だけでなく一般の運動量分布に当てはまる性質である．

$$\int \left[(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)\times \boldsymbol{p}_{//}\right]\,d\boldsymbol{\rho} = \int (\boldsymbol{\rho}\times \boldsymbol{p}_{//})\,d\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0 \times \int \boldsymbol{p}_{//}\,d\boldsymbol{\rho}. \qquad (11)$$

ここで $\boldsymbol{\rho}=(x,y)$, $\boldsymbol{\rho}_0$ が移動後の原点，$\boldsymbol{p}_{//}$ が $\boldsymbol{p}$ の xy 面内方向成分である．断面を横切る正味の運動量がない場合は，右辺2項目は0になることが分かる．原点の取り方によって変化しない角運動量を**内在的 (intrinsic)**，原点の取り方によって変化する部分を**外在的 (extrinsic)** と呼び分けることがある．ただし物体に対する作用を議論する場合は，実質的な積分範囲が物体の大きさによって限られることに注意する必要がある．スピン角運動量は物体の大きさによらず内在的な角運動量として作用し，物体のその場での回転を引き起こすが，物体がビームに対して小さい場合は軌道部分は外在的な角運動量として作用する[21]．

6. おわりに

光渦と位相特異点，角運動量について目で感じられる基本的な現象を中心に紹介してきた．この分野には他にも，レーザー加工や情報伝達への応用，多次元の量子もつれ[10]等の興味深いトピックがたくさんある．本稿を入口としてこの豊かな研究分野に興味を持って頂ければ幸いである．

参考文献

1) L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, and J.P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **45** (1992) 8185.
2) M.R. Dennis, K. O'Holleran, and M.J. Padgett, *Prog. Opt.* **53** (2009) 293.
3) A.M. Yao and M.J. Padgett, *Adv. Opt. Photon.* **3** (2011) 161.
4) A. Bekshaev, K.Y. Bliokh, and M. Soskin, *J. Opt.* **13** (2011) 053001.
5) 特集「特殊な位相・偏光分布をもつ光」光学 **35** 巻 12 号 (2006).
6) 特集「奇妙なレーザビーム」光アライアンス **20** 巻 4 号 (2009).
7) H. Kogelnik and T. Li, *Proc. IEEE* **54** (1966) 1312.
8) M. Uchida and A. Tonomura, *Nature* **464** (2010) 737.
9) C.E.M. Demore, Z. Yang, A. Volovick, S. Cochran, M.P. MacDonald, and G.C. Spalding, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 194301.
10) R. Inoue, T. Yonehara, Y. Miyamoto, M. Koashi, and M. Kozuma, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 110503.
11) H. He, N.R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, *J. Mod. Opt.* **42** (1995) 217.
12) N. Matsumoto, T. Ando, T. Inoue, Y. Ohtake, N. Fukuchi, and T. Hara, *J. Opt. Soc. Am. A* **25** (2008) 1642.
13) G. Foo, D.M. Palacios, and G.A. Swartzlander, Jr., *Opt. Lett.* **30** (2005) 3308.
14) K.I. Willig, J. Keller, M. Bossi, and S.W. Hell, *New J. Phys.* **8** (2006) 106.
15) M. Takeda, H. Ina, and S. Kobayashi, *J. Opt. Soc. Am.* **72** (1982) 156.
16) W. Wang, S.G. Hanson, Y. Miyamoto, and M. Takeda, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 103902.
17) W. Wang, T. Yokozeki, R. Ishijima, A. Wada, Y. Miyamoto, M. Takeda, and S.G. Hanson, *Opt. Express* **14** (2006) 120.
18) M.E.J. Friese, J. Enger, H. Rubinsztein-Dunlop, and N.R. Heckenberg, *Phys. Rev. A* **54** (1996) 1593.
19) N.B. Simpson, K. Dholakia, L. Allen, and M.J. Padgett, *Opt. Lett.* **22** (1997) 52.
20) G. Molina-Terriza, J. Recolons, J.P. Torres, L. Torner, and E.M. Wright, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 023902.
21) A.T. O'Neil, I. MacVicar, L. Allen, and M.J. Padgett, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 053601.

（みやもと・ようこ，電気通信大学大学院情報理工学研究科）

特集／光と物理学

光領域の原子時計



洪　鋒雷

一般相対性理論によると，座っている我々にとって，立っているときよりもちょっとだけ時間の進み方が遅い．5 億年が経つと 1 秒の遅れが生じるという僅かな差である．我々の感覚でわからないだけではなく，今までは最先端の科学技術でもこの差を測ることはできなかった．ところが，最近開発されている光領域の原子時計はこのような僅かな時間の遅れでもわかるという．

そもそも時間を測る時計はどのように作られているのか．時計は，周期現象を伴う振動子とその周期を数えるカウンター（計数器）から構成されている（図 1）．人間が太古の時代から使ってきた日時計は，地球の自転という周期現象を利用し，太陽光の影をカウンターとして使った．17 世紀に発明された振り子時計は，振り子の振動を数えて時計の針を進める仕組みを持っている．また機械式時計では，心臓部にテンプという振動する部品が入っており，典型的なものはその振動を 8 回数えて時計の針を 1 秒進める．そして今日我々が日常的に使っている腕時計には，水晶振動子が入っており，水晶の振動を 32768 回数えて時計の針を 1 秒進める．

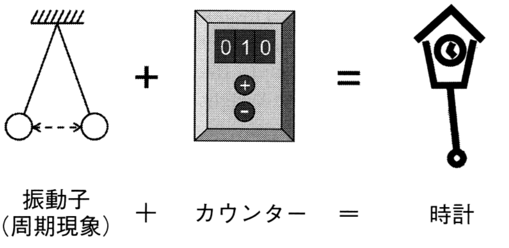


図 1　時計の構成．

このように，時計に利用される周期現象の周波数を上げることにより，時間をより細かく分割することができ，時間を測る精度を向上させることができた．一方では，振動子はいわゆる時間の基準を作っており，その周期の正確さが大変重要である．ここで，時間の基準を決める 1 秒の定義の変遷を見ていこう．1956 年までは，1 秒は地球の自転から定義され，1 日の 86400 分の 1 と決められていた．この定義の正確さは，不確かさで表すと 10^{-7} 程度である．つまり，10^7 秒（約 100 日）が経つと 1 秒の誤差が生じるという計算になる．1956～1967 年の間では，1 秒は地球の公転から定義され，1 太陽年の 31556925.9747 分の 1 とされていた．この定義による秒の不確かさは約 2×10^{-9} である．1967 年に，フランスで開かれた第 13 回国際度量衡総会において「秒はセシウム 133 原子の基底状態の 2 つの超微細準位間の遷移に対応する放射の 9192631770 周期の持続時間である」という新しい定義が採択された．この定義では，原子を振動子として採用し，原子準位間のマイクロ波領域の遷移を周期現象として使っている．遷移に伴うマイクロ波の振動を約 91 億回数えて，時計の針

を1秒進める．セシウム原子時計の不確かさは，現在では 4×10^{-16} のレベルに到達している．これは，8000万年に1秒の誤差に相当し，それでも冒頭の一般相対性理論による5億年に1秒の遅れを測ることはできない．

さらに時計の精度を向上させるにはどうすればよいのだろうか．振動子の周波数を上げて時間をさらに細かく分割することと，基準としての周期現象の正確さをさらに上げる必要がある．この両方の条件を満たしてくれるのが，原子の光領域の遷移を利用した次世代原子時計である．

光領域の原子時計を実現するには，まず光波の振動である光周波数を測るカウンターが必要となる．しかし，20世紀の終わりまでは光周波数を数えることが非常に困難であった．1999年頃から，ドイツのヘンシュ（T.W. Hänsch）と米国のホール（J.L. Hall）のグループで，モード同期超短パルスレーザーを用いた「光周波数コム」による光周波数カウンターが実現され，この分野において極めて大きな技術革新が起こった．ヘンシュとホールは，「光周波数コム技術を含む，レーザーを使った精密分光の発展への貢献」が認められ，2005年度のノーベル物理学賞を受賞した．光周波数コムを利用すると，光波の振動を例えば500兆回数えて，時計の針を1秒進めることができる．

一方，原子の光領域の遷移を基準として使うために，外部環境が遷移周波数に与える影響を最小限にする工夫がなされている．その1つが「単一イオン光時計」と呼ばれる方法で，レーザー冷却された単一イオンをトラップポテンシャルの底に置いて振動子として使う．この方法では，イオンを遷移波長よりもずっと小さな領域に閉じ込めるので，遷移周波数はドップラー効果などの影響を受けない（ラム・ディッケの条件）．しかし，単一の粒子であるため，観測信号が弱く，時計の安定度が上がらないという欠点がある．「光格子時計」は，この方法を発展させ，およそ100万個の原子をレーザー光によって作られる定在波（光格子）で閉じ込め，ラム・ディッケの条件を実現する．さらに，光格子を作るレーザー光による時計周波数のシフトに関しては，時計遷移の上準位と下準位のシフトが等しくなる光格子波長の存在（魔法波長）が見出され，光格子が時計の周波数に影響を及ぼさないことがわかった．

「単一イオン光時計」も「光格子時計」も理論上では，不確かさは 10^{-18} のレベルに到達する．単一イオン光時計がこのレベルの不確かさに到達するのに1日ぐらいデータの積算が必要であるのに対して，光格子時計は数分の測定時間で到達する．10^{-18} のレベルの不確かさは，300億年に1秒の誤差に相当し，座っている我々と立っている我々の間の時間の進み方の違いを測定することができる．

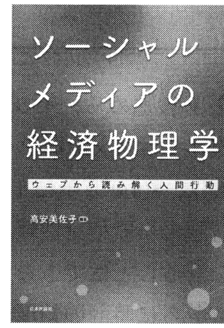
光領域の原子時計は，研究開発が大きく前進し，いずれ新しい秒の定義になる公算が大きい．これだけ精密な時計は現実の世界では何に役に立つのであろうか．時計の精度の向上により，これまで知ることができなかった極小さな環境外乱（電磁場，重力場）による時計周波数への影響を観察することが可能となる．逆にいえば，超高精度の時計は，環境外乱の超高感度センサーとしても働く．一般相対性理論に従えば，光領域の原子時計はまさに高精度の重力場測定センサーであり，測地学や水文学，または宇宙における基礎物理の検証実験にも用いることができる．この性能を利用することで，光領域の原子時計の鉱物探査や地震予知への応用が期待される．さらに，光領域の原子時計は基礎物理定数の恒常性を検証する有力なツールとして基礎科学への貢献も期待されている．

（こう・ほうらい，産業技術総合研究所）

ソーシャルメディアの経済物理学

ウェブから読み解く人間行動

高安美佐子編著，A5 判，192 頁，本体 2800 円，日本評論社



2010 年から 2011 年にかけて反政府デモに端を発し，中東・北アフリカ諸国に拡大した“アラブの春”では，Twitter，Facebook，ブログ等のソーシャルメディアを介して瞬く間に情報が伝わり，暴動や革命にまで至ることとなった．また，近年のアメリカ大統領選挙においても Twitter を用いた選挙戦略が注目を集めている．ソーシャルメディアの大きな特徴の一つはリアルタイムで多くの人々が同時に情報をやりとりすることができることであり，タイトルにもあるように経済活動をはじめとする人間行動を読み解く上で重要なツールとして認識されつつある．

本書では，誰でも閲覧できるインターネット上のブログサイトや Twitter などに書き込まれた記事を対象とし，その収集方法から解析手法まで，ソーシャルメディア上の情報を取り扱うために必要な事柄について詳しく解説されている．編者でもある高安美佐子氏をはじめとする学術研究の第一線で活躍する研究者から実際にソーシャルメディアを扱う企業の専門家やエコノミストまでと幅広い背景をもつ 10 名それぞれの視点からの知見が平易に紹介されており，第 1 章から順に読み進めることでソーシャルメディアの情報を読み解く技術について基礎から理解できるように考えられている．

ソーシャルメディアの情報を扱うということは，大雑把な言い方をすればデータ収集・解析に基づいてモデルを構築し，そのモデルを用いて予測を行うことであるが，一旦モデルを作ったからといってそのモデルが完全なものであるということはまずない．これはモデリングを行う他分野の研究にもあてはまることであるが，対象とする現象を表すモデルを立てた後に，このモデルが本当にその現象をよく表しているかという検証とその検証結果に基づく修正が必要不可欠である．検証手段としては，モデルに基づいた予測と実際の結果との比較がよく用いられる．この比較により，モデル自体が否定されることもあれば，予測精度が求められる基準に達しないこともある．どちらの場合においても，モデルの修正が必要となる．また，このモデルの修正のために再度データ解析が必要となることも多い．この様にデータ解析・モデリング・予測を繰り返し行い，より良いモデルを構築できれば，より高い精度で予測を行うことが可能となる．

ソーシャルメディアからのデータ収集に関しては第 2 章において細部にも気を配った解説がされている．「日本語圏において 1 日に投稿されるブログ記事数は約 150 万件」もあり，データ収集一つにおいても様々な技術が要求されるため，ソーシャルメディアのデータ解析に初めて取り組もうという読者には特に有益な情報が多く掲載されている．

データ収集の次は“形態素解析”と呼ばれる，文章を言葉として意味をなす最小単位に分割する技術が必要であるが，日本語では文章の区切り方で意味が異なる場合もあり，形態素解析は特に注意を要する作業の一つである．第 3 章はブログデータから抽出されたキーワードの頻度の時系列データに関する解析に充てられ，第 4 章はブロガーの書き込み行動のモデリングについて複数のモデルと統計物理学を用いた解析手法について解説が加えられている．

データ解析・モデリングによって得られた結果は，経済活動だけでなく多くの分野での応用が期待されている．クチコミ分析はアンケート調査やインタビューよりも手軽で，リアルタイムの消費者の意見を知る方法として注目されている．例えば広告キャンペーンにおいて，キャンペーン開始前や初期の情報からその後のインターネット上での反応の予測可能性が示唆されている．また，最近ではソーシャルメディア等のツールから発信された情報に基づき，インフルエンザ等の感染症の流行をリアルタイムでモニタリングする試みも行われている．ソーシャルメディアの普及により，ソーシャルメディア上の情報の幅広い分野での応用が現実のものとなりつつある．本書は，このような新しく大きな可能性を秘めた分野への挑戦を試みる読者の大きな助けになるものと考える．

占部　千由（FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト／東京大学生産技術研究所）

弦の場の理論

弦理論のより深い理解のために



石橋延幸・村上公一共著，B5 判，184 頁，本体 2429 円，サイエンス社

本書は「弦の場の理論」と呼ばれる弦理論の定式化について，その基礎から最近の進展までを詳しく解説したものである．

言うまでもなく，超弦理論は無矛盾な量子重力理論を包含する究極の統一理論の最有力候補である．空間に 1 次元的に伸びた弦（ひも）は振動や回転の自由度を持ち，その各モードに対応して無限種類の質量とスピンを持った状態を表す．特に，端を持った弦（開弦）に含まれる無質量ベクトル場と端のない弦（閉弦）に含まれる無質量スピン 2 の場は，それぞれ Yang–Mills 場および graviton 場と同定できる．本書のテーマである「弦の場の理論」は，弦理論を Yang–Mills ゲージ対称性や一般座標不変性を包含する弦的な局所ゲージ対称性を持った理論として与える定式化である．スカラー場理論や Yang–Mills 理論等の通常の局所場の理論が時空点 x^μ の関数である場 $\varphi(x)$ を力学変数として持つのに対応して，弦の場の理論は弦の配位を表す（パラメータ σ の）関数 $X^\mu(\sigma)$ の汎関数である弦場 $\Psi[X^\mu(\sigma)]$ を力学変数とする．弦場 $\Psi[X^\mu(\sigma)]$ の直観的な意味は，関数 $X^i(\sigma)$ の表す空間的配位を持ったひもの生成/消滅である．弦の場の理論は弦場の作用 $S[\Psi]$ を与えることで定義されるが，$S[\Psi]$ が Ψ に対する弦的な局所ゲージ変換で不変となっており，例えば弦場に含まれる無質量ベクトル場が受ける変換は Yang–Mills ゲージ変換を再現する．

このように，弦の場の理論は局所場の理論，特にゲージ理論の考え方を拡がりを持った弦に対して拡張した自然な定式化であり，弦理論の非摂動論的解析に役立つものと期待されていた．しかし，弦理論の標準的な教科書では共形場理論による定式化（第一量子化）が主であり，弦の場の理論についてはほとんど記述がない．例えば，Polchinski の教科書（“String Theory”, vol. 1 and 2, Cambridge University Press, 1998）ではかろうじて 9.6 章が弦の場の理論（string field theory）に触れているが，最後に “However, it remains to be seen whether string field theory is a useful tool beyond perturbation theory. ...” などと懐疑的なことを書いている．しかし，正にこの教科書が世に出た直後に，「タキオン凝縮」という非摂動論的現象の解析が弦の場の理論を用いて初めて可能であることが実証され，その有用性が認識された．その後，2005 年にはタキオン凝縮を表す厳密解が発見され，今も活発な研究が続いている．

弦の場の理論には，開弦/閉弦/超対称性の有無等の様々な種類の他，同じ弦理論に対してもいくつかの異った定式化が存在するが，本書はそれらをかなり広く紹介している点で他に類を見ない解説書である．ただし，共形場理論についてはかなりの知識を仮定しており，未学習の読者は弦場等の説明から始まる第 1 章でつまずくかも知れない．第 2～4 章は，Witten が 1985 年に提唱した Cubic String Field Theory（CSFT）と呼ばれる開弦の場の理論について，その基本的定式化から散乱振幅の計算法，さらに超対称化までを詳しく解説している．第 5，6 章では上で述べた「タキオン凝縮」と呼ばれる D ブレインに関する非摂動論的現象の物理の CSFT による解析，特にタキオン凝縮が実現した状態を表す CSFT の古典厳密解について，ごく最近の進展までが解説されている．

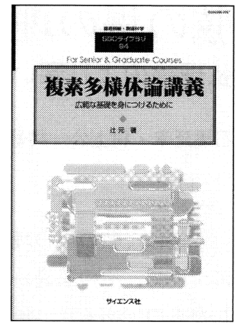
さて，第 7 章からは趣きが変わり，「Joining-Splitting 型の弦の場の理論」の解説に入る．このタイプの弦の場の理論にもいくつかの種類があるが，基本は Kaku–Kikkawa が 1974 年に提出した「光円錐ゲージの弦の場の理論」で用いられた “ひもが切れたりくっついたり” という見た目にも自然な相互作用である．第 7～9 章ではこの光円錐ゲージの弦の場の理論が解説されているが，本書の著者達が最近まで活発に研究を行っていたこともあり，非常に熱の入った記述である．最後に，第 10，11 章は評者を含むグループが 1985 年に提唱したゲージ不変な弦の場の理論（HIKKO 型）やその変形版の解説にあてられている．

Polchinski の教科書等で共形場理論の勉強をある程度済ませた上で本書を読めば，弦の場の理論の基本から研究の最先端までを概観することができるであろう．

畑　浩之（京都大学大学院理学研究科）

複素多様体論講義

広範な基礎を身につけるために



辻元著，B5 判，216 頁，本体 2362 円，サイエンス社

一つの分野の研究が進んで詳しいことがたくさんわかってくるにつれ，新しい理論のインパクトは集積された知識量に反比例して小さくなる．それはインパクトが相対的だからであり，理論そのものが矮小化するわけでないのだが，研究を志す人間にとって生涯をかけて取り組むに値するテーマが探しにくくなるのは当然である．複素多様体論も例外ではない．すでに 20 年以上前，小平邦彦先生が参考文献が 1000 以上ある複素多様体論の本が出たと，どこかで嘆いていらした．

このような状況で求められる複素多様体論の入門書があるとしたら，それはもう，非在来型のものでなければならない．辻元氏のこの本は，その意味でまさにうってつけの，時宜に即したものである．

評者は昨年の 9 月，ある晩餐会で辻氏の評判を耳にした．同席していた川又雄二郎氏が Yum-Tong Siu 氏に向かって “Is Tsuji a student of yours?” と尋ねたのがきっかけだった．本書の著者略歴にあるように，辻氏は 1986～88 の間，Harvard 大学に客員研究員として滞在したからである．川又氏の質問を受けた Siu 氏の答がふるっていた．“No, he isn't. He is too independent for that.” というのである．そしてこう付け加えた．“He is an unconventional person.” この “unconventional”（型破りの）という言葉はいかにも Siu 氏が辻氏を形容するのにふさわしいと思い，感心した．その上，シェールガスのようなニュータイプの資源をさすのにこの言葉が使われており，「非在来型」と訳されていることを最近知った．それ以来，評者にとって辻氏は「非在来型数学者」である．

さて本書についてだが，すでに数年前からネット上には原型となる 100 ページ程の解説がアップされており，広く読まれていたようである．本書は 200 ページ以上あるので大幅なボリューム・アップである．

内容であるが，多変数関数論の基礎の上に立って，「コホモロジー群という線形空間に複素多様体の性質を投影させる」ことにより，定理の大半を得ている．第 1 章「多変数関数論からの準備」から第 7 章「ドルボー複体と層係数コホモロジー」までは，複素多様体を学ぶには誰もが身につけねばならない常識である．したがってここは誰が書いても似たり寄ったりだと思いがちだが，そうでないことは本書と他の本を見比べてみればすぐわかる．本書の書き方は，「要点を簡潔に述べ，細部には深入りしない」ということのようで，楕円曲線については次のように触れられているだけである．「特に 1 次元の複素トーラスを楕円曲線（elliptic curve）と呼ぶ．楕円曲線については非常に深い理論が構築されている．」志村，谷山，ワイルズなどの名前を出さないところがミソであろう．その一方で，第 5 章「解析空間」では，解析空間の構造層が連接であるという岡の定理が丁寧に証明してある．型破りといえば型破りだが，これが本当だという気もする．最近の数学の解説記事を読み慣れている向きにはこのような書き方は新鮮かもしれない．基礎的な部分が一段落した後の話題の広さも型破りである．第 8 章「交叉理論」では双有理幾何の未解決の大問題を視界に入れた書き方がしてある．並の力量では書けない部分だろう．第 10 章から第 13 章は小平，ヘルマンダーらによる今や古典となった解析的方法の解説である．第 14 章は L^2 拡張定理と特異エルミート計量という強力アイテムの解説と，それらを用いて藤田予想という「見かけによらず難しい予想」に肉迫するという話である．このアプローチは，辻氏と Siu 氏が互いに独立に（independently!），難問「多重種数の変形不変性」を解決した時のものでもあった．ところがここが本書の真骨頂というわけでもない．この後の 4 章はスタイン多様体などの比較的穏当な話題が，「積み残しがないように」と感じさせる調子で続くが，最後の第 19 章「ケーラー・アインシュタイン計量」では辻氏の最近の興味の中心へと読者を誘っている．「広範な基礎を身につけるために」というふれこみは決して伊達ではない．

大沢 健夫（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

佐藤 文隆

1983年3月号

「ブラックホールに毛は三本」以上は生えないという，いかにもJohn Wheelerらしい表現の定理を証明するのが，1970年頃の課題であった．解に含まれる質量，角運動量，電荷の三つのパラメターが毛のことである．境界条件から解の唯一性が証明され，それがたまたま当時知られていたカー解であるというのである．こういう論議が飛び交っている頃，カー解以外にどんな定常回転の時空解があるのかを動機に発見されたのが冨松–佐藤解であった．1972年に最初の解が見つかり，引き続き，1973年には整数で分類される解のシリーズが発見された．「ブラックホールとソリトン」というこの特集は，それから10年を経た年のものである．



この十年の間にブラックホールにソリトンというキーワードが付く様になる大きな進展があった．時空解が従うアインシュタインの方程式を解くこととソリトンという非線形波動方程式を解くことが数学的に同じ課題だと認識されたのである．ある解から新たな別解を生成する理論が既にソリトン問題で整備されており，その生成理論を時空解の場合に適用すれば，冨松–佐藤解のシリーズは系統的に導出可能なのであった．重ね合わせるカー解の個数が解のシリーズに表れる整数と関係している．冨松–佐藤解はこの多重ソリトンの手法で発見されたものではなかったが，この十年で，非線形偏微分方程式論の視点でこの解シリーズの透明な位置づけが分かってみると，解の存在自体の神秘性は一挙に消滅した．

この特集は主にこの視点で組まれている．共通の課題としては，ゲージ場のヤン・ミルズ方程式の厳密解問題があり，ソリトン波よりはこの方がアインシュタイン方程式の時空解問題により近い．しかし，この分野から時空解に結びつける試みはそれまでなかったようだ．また時空解と違ってゲージ古典場の厳密解が物理的に大きな役目を果たしていない．

この特集には，天文学的ブラックホール形成の数値計算で唯一性定理に挑む研究の解説もあるが，この課題での明快な回答は今もない．その一方，しばらく中断していたこの解シリーズの物理的解析がここ十年余りの間に幾つか発表されている．ブラックホールに絡む時空構造問題は，今後は，天文学的課題としてでなく，むしろ統一理論絡みの課題と再定義されるのかもしれない．

方程式が存在を規定すると考えれば，その解に無意味なものは含まれないはずだという発想を生み出す．したがって，この発想は，多重ソリトンに相当する時空構造とは何なのか？という興味を喚起する．この問題での大きな進展はまだこれからなのかも知れない．

（さとう・ふみたか，甲南大学，京都大学名誉教授）

例題形式で探求する 微積分学の基本定理

関数の性質から幾何構造を探る

第2回

多変数関数の微分と積分

森田 茂之

第１回では，１変数関数の微分と積分について簡単に復習した．そして，１次元のリーマン積分を一般化する概念である，線積分についての考察を始めた．それは，平面や空間内の曲線上で定義された関数を，どのように積分するかという問題であった．今回は，２変数や３変数，さらには一般に**多変数関数**の微分と積分について必要事項を復習する．そして，線積分の概念の２次元への一般化であり，同時に２重積分の一般化でもある，**面積分**の概念に関する考察を始める．

2.1 多変数関数の偏微分

１変数関数の微分可能性の考えを，多変数関数に適用してまず出てくるのが**偏微分**である．例えば２変数関数 $f(x,y)$ が与えられた場合，x は自由に動かすが y は一定の値に止めておけば，$f(x,y)$ は x の関数となる．これが x について微分可能のとき，f は x について偏微分可能であると言う．そして，その導関数を

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{あるいは} \quad f_x$$

と書き，これを f の x に関する偏導関数と呼ぶ．同様に $\frac{\partial f}{\partial y}, f_y$ も定義される．偏導関数が再び x あるいは y について偏微分可能ならば，それらの偏導関数が定義される．例えば $\frac{\partial f}{\partial x}$ が y について偏微分可能ならば，$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ が定義されるが，これを

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{あるいは} \quad f_{xy}$$

と書く．一般の n 変数関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ についても同様に，r 階の偏導関数

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \cdots \partial x_{i_1}}$$

が定義される．$f_{x_{i_1} \cdots x_{i_r}}$ と書く場合もある．ここで，偏微分する変数の順序に関して重要な事実を思い出しておこう．すなわち，$f_{x_i x_j}, f_{x_j x_i}$ が存在し，ともに連続ならば $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ が成立するということである．一般に，r 階までのすべての偏導関数が存在し，それらがすべて連続となるような関数を C^r 級関数という．また，すべての高階の偏導関数が存在し，それらがすべて連続となるような関数を C^∞ 級関数という．このような関数の偏導関数は偏微分する変数の順序によらないため，その高階の偏導関数は

$$\frac{\partial^{a_1 + \cdots + a_n} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}$$

の形に書けることになる．

> **例題 2.1** 3 変数関数 $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ に対し $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ を計算せよ．

解答 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおけば $f = \frac{1}{r}$ であるから

$$f_x = -\frac{1}{r^2} r_x = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2} r^{-1} \cdot 2x = -x r^{-3}$$

となる．x についてもう一回偏微分すれば

$$f_{xx} = -r^{-3} + 3x r^{-4} r_x = -r^{-3} + 3x r^{-4} \cdot x r^{-1} = -r^{-3} + 3x^2 r^{-5}$$

が得られる．このとき，関数 f の変数 x, y, z に関する対称性から

$$\Delta f = -3r^{-3} + 3(x^2 + y^2 + z^2) r^{-5} = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0$$

となる．

上記は 3 変数関数の場合であるが，一般に n 変数関数 f に対して

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

により定義される Δf を f の**ラプラシアン** (Laplacian) という．また，$\Delta f = 0$ となる関数 f を**調和関数** (harmonic function) という．

2.2 2 変数関数の微分

多変数関数の微分を考える場合，各変数に関する偏微分だけでは不十分である．そこで，1 変数関数 $y = f(x)$ の微分可能性の定義を，多変数の場合に拡張しやすいように書き換えてみよう．

関数 $y = f(x)$ が $x = a \in \mathbb{R}$ で微分可能

$\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在する

$\Leftrightarrow$ ある定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して，次の条件が満たされる

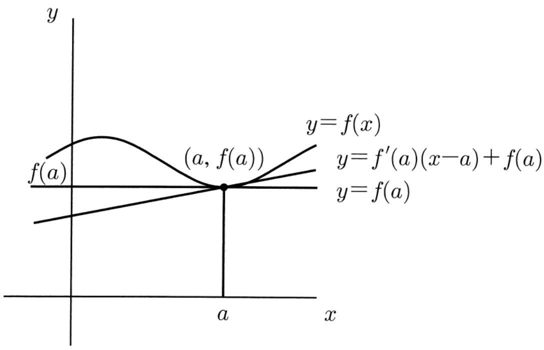


図 2.1　$y = f(x)$ のグラフとその近似．

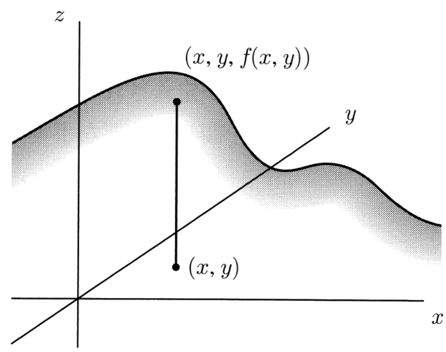


図 2.2　2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフ．

$$(*) \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - ch}{h} = 0$$

"$\Leftrightarrow$" f のグラフ $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ 上の点 $(a, f(a))$ において

平面曲線 Γ_f への接線が存在する

上記の 2 番目の $\Leftrightarrow$ において，定数 c が存在するとき，もちろんそれは $f'(a)$ に一致する．そして，以下に述べる 2 変数関数の微分可能性の定義を見れば，条件 $(*)$ が一般の次元に拡張しやすい形となっていることが分かるだろう．

また 3 番目の "$\Leftrightarrow$" において接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

となる．ここで引用符がついているのは，数学的に両者が同値というわけではなく，グラフへの接線の存在が，言わば微分可能性という概念の幾何的な "こころ" であることを表したものである．あるいは，次のように表現することもできる．図 2.1 を見てほしい．与えられた関数 $f(x)$ の，点 $x = a$ における 0 次の近似は定数関数 $y = f(a)$ であるが，f が $x = a$ において微分可能であるとは，そこでの 1 次の近似ができるということであり，それは具体的には 1 次関数 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ で与えられる．

上記を基に 2 変数関数の微分可能性の定義を述べよう．まず微分可能性の "こころ" を実現するためには，2 変数関数 $f(x, y)$ のグラフ Γ_f が必要になるが，それは次の式により定義される．

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

図 2.2 から分かるように，Γ_f は $\mathbb{R}^3$ の中のある曲面である．1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフの場合は，f の定義域上でいくつか x の値 a_i を選び，そこでの関数の値 $f(a_i)$ を計算して xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上に点 $(a_i, f(a_i))$ をプロットすれば，Γ_f の形が平面曲線として浮かび上がって来るのであった．2 変数関数 $z = f(x, y)$ の場合も同様にしたいのであるが，定義域が 2 次元であるため，点の選び方の自由度が格段に増す．例えば定義域をいくつかの小さな正方形で覆い，それぞれの正方形をまた小さな正方形で格子状に分割して生じる格子点 (a_i, b_i) を代表に選び，そこでの関数の値 $f(a_i, b_i)$ を計算して xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ 上に点 $(a_i, b_i, f(a_i, b_i))$

をプロットする方法が考えられる．しかし，自由度の大きさのためグラフの形状がうまく浮かび上がって来るとは限らない．グラフの概形を早く把握するためには，関数の形を考慮した工夫が必要となる．

例題 2.2　2 変数関数 $z = xy$ のグラフの概形を描け．

解答　まず定義域の xy 平面上の直線 $y = x$ に関数を制限すれば，下に凸な放物線 $z = x^2$ が得られる．同じ xy 平面上で直線 $y = -x$ に制限すると，上に凸な放物線 $z = -x^2$ が得られる．次に視点を変えて，c を定数として平面 $z = c$ と求めるグラフ Γ との交わりを考えてみる．この方法は一般の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ に適用できる．比喩的に言えば，グラフ Γ_f を地形と見なしてその等高線を描くことに対応している．今の場合，交わりは平面 $z = c$ 上の曲線 $xy = c$ となる．この曲線は，$c > 0$ のときには第 1, 3 象限の直角双曲線であり，$c < 0$ のときには第 2, 4 象限の直角双曲線となる．また $c = 0$ の場合は，原点で交わる 2 直線，すなわち x 軸と y 軸であり，原点に特異点が現れる．これらを総合すれば，図 2.3 に示すようなグラフの概形が得られる．右側には真上から見た等高線を描いてあるが，第 1, 3 象限には限りなく高くなっていく山があり，第 2, 4 象限にはどこまでも下がっていく谷がある．そして原点はそれらが交錯する峠のような地点である．このような点は鞍点（saddle point）と呼ばれる．

さて，2 変数関数 $z = f(x, y)$ の微分可能性の定義に戻ろう．幾何的な "こころ" をこの場合に当てはめれば，f が点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ で微分可能とは，f のグラフ Γ_f 上の点 $(a, b, f(a, b))$ においてグラフへの接平面が存在することとなろう．そこで接平面の方程式はどうなるべきかを考える．直線 $y = b$ 上に関数を制限すれば，x に関する 1 変数関数 $f(x, b)$ が得られる．そのグラフは Γ_f 上の曲線であるが，その上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接線の方程式は $z = f_x(a, b)(x-a)+f(a, b)$ となる．同様に直線 $x = a$ 上に関数を制限すれば，y に関する 1 変数関数 $f(a, y)$ が得られる，そのグラフもまた Γ_f 上の曲線であるが，

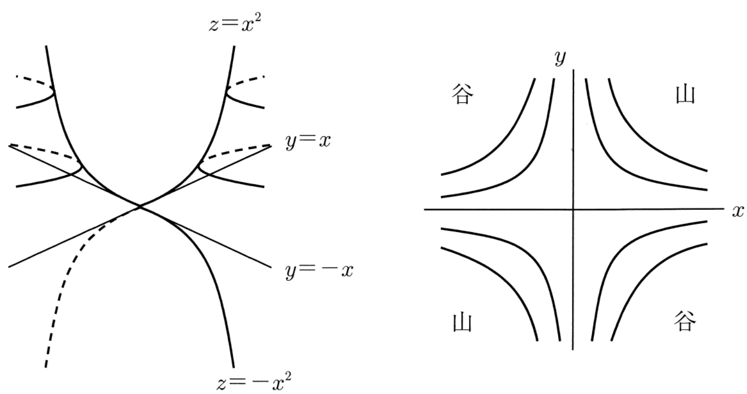


図 2.3　$z = xy$ のグラフの概形．

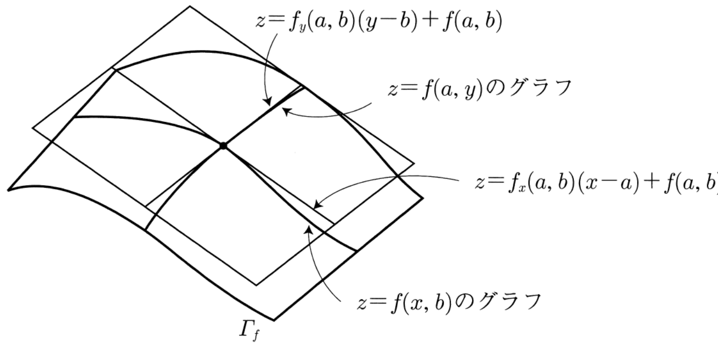


図 2.4　$z = f(x, y)$ のグラフへの接平面．

その上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接線の方程式は $z = f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$ となる．これらの 2 つの接線は想定される接平面上に乗っている．図 2.4 を見てほしい．従って，接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b) \tag{2.1}$$

となる．しかし，実は f が 2 変数 x, y のいずれに関しても，点 (a, b) で偏微分可能であったとしても，f が微分可能であるとは限らないのである．それは，x 軸と y 軸の 2 つの方向で接線が存在するとしても，接平面が存在するとは限らないということに対応している．そこで，上記が実際に接平面になる条件を考える．$x = a + h, y = b + k$ とおけば，上記方程式 (2.1) は $z = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + f(a, b)$ と書き換えられる．対応

$$\mathbb{R}^2 \ni (h, k) \mapsto f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \in \mathbb{R}$$

は $(1, 2)$ 行列 $C = (f_x(a, b), f_y(a, b))$ の定める線形写像であるが，接平面となる条件は (h, k) が $(0, 0)$ に近づくとき，$f(a + h, b + k) - f(a, b) - C^t(h, k)$ をベクトル (h, k) の長さで割った商が 0 に近づくこと，すなわち

$$\lim_{\substack{(h,k)\to\mathbf{0} \\ (h,k)\neq\mathbf{0}}} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - C^t(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

が成立することである．これが 2 変数関数の点 (a, b) における微分可能性の定義である．関数 f の点 (a, b) における 0 次の近似は定数関数 $z = f(a, b)$ であるが，上記の微分可能性の条件が成立するときは 1 次の近似

$$z = C\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + f(a, b)$$

が存在するということになる．

2.3 多変数ベクトル値関数の微分

前節で復習した 2 変数関数の微分可能性の定義は，次のように一般の多変数ベクトル値関数の微分可能性の定義に一般化される．

$$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

を m 次元に値をとる n 変数のベクトル値関数とする．このような関数は，具体的には

$$f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\ldots,f_m(\boldsymbol{x})) \quad (\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n)$$

のように表すことができる．ここで $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ (i=1,\ldots,m)$ は n 変数関数であり，f の第 i 成分と呼ばれる．すなわち m 次元に値をとるベクトル値関数とは，通常の関数を m 個同時に考えたものと言える．

さて，このような関数 f の微分の定義を述べよう．点 $\boldsymbol{a}$ を $\mathbb{R}^n$ の点とする．ある (m,n) 行列 $C=(c_{ij})\ (i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n)$ が存在して

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n}} \frac{|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-{}^t(C\,{}^t\boldsymbol{h})|}{|\boldsymbol{h}|}=0$$

が成立するとき，f は点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ で微分可能という．ただし，$\boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し，$|\boldsymbol{h}|=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}$ は $\boldsymbol{h}$ の長さを表し，${}^t\boldsymbol{h}$ は横ベクトル $\boldsymbol{h}$ を転置して得られる縦ベクトルを表すものとする．

上記の条件が満たされるとき，$C=Df(\boldsymbol{a})$ と書き，これを f の $\boldsymbol{a}$ における微分という．それは $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像である．ここで思い出しておきたい重要な定理は，f が C^1 級関数，すなわち各方向に偏微分可能で偏導関数が連続ならば，微分可能となるということである．このとき微分は，偏微係数により具体的に

$$C=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$$

と表される．これを**ヤコビ行列**という．また，$m=n$ の場合にヤコビ行列の行列式を**ヤコビアン**という．

> **例題 2.3**　複素数平面 $\mathbb{C}$ を，対応 $\mathbb{C}\ni z=x+iy\mapsto(x,y)\in\mathbb{R}^2$ により $\mathbb{R}^2$ と同一視する．このとき，対応 $z\mapsto z^m\ (z\in\mathbb{C},m\in\mathbb{Z})$ により定義される関数 $f_m:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$（ただし，$m$ が負の場合は原点は定義域から除く）の各点におけるヤコビアンを求めよ．

解答　複素数 $z=x+iy$ の実部 x と虚部 y をそれぞれ $\mathrm{Re}\,z,\mathrm{Im}\,z$ と記す．このとき題意の関数は $f_1(x,y)=\mathrm{Re}(x+iy)^m, f_2(x,y)=\mathrm{Im}(x+iy)^m$ と表される．従って，Df_m の jk 成分 $(j,k=1,2)$ を d_{jk} とすれば

$$d_{11}=\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}=m\mathrm{Re}(x+iy)^{m-1},\quad d_{12}=\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}=-m\mathrm{Im}(x+iy)^{m-1},$$

$$d_{21}=\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}=m\mathrm{Im}(x+iy)^{m-1},\quad d_{22}=\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}=m\mathrm{Re}(x+iy)^{m-1}$$

となる．これから求めるヤコビアン $d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}$ は

$$\begin{aligned}&m^2\left(\mathrm{Re}(x+iy)^{m-1}\right)^2+m^2\left(\mathrm{Im}(x+iy)^{m-1}\right)^2\\ =\ &m^2\left|(x+iy)^{m-1}\right|^2=m^2(x^2+y^2)^{m-1}\end{aligned}$$

となる（ただし，$m=0$ の場合は原点での値も 0 とする）．

2.4 多変数関数の積分

多変数関数の微分に続いて，積分についても簡単に復習しておく．簡単のために 2 重積分と面積について述べるが，一般の次元の多重積分も同様である．

$K=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ を長方形とし，有界な実数値関数 $f:K\to\mathbb{R}$ が与えられているものとする．1 次元の場合にしたように，有界閉区間 $[a,b]$ および $[c,d]$ をいくつかの分点で分割すれば，小さな長方形 K_i による K の分割 $\varDelta=\{K_i\}_i$ が定まる（図 2.5 参照）．そこで f の K_i 上での値の下限および上限を使って

$$m_i(\varDelta)=\inf_{P\in K_i}f(P),\quad M_i(\varDelta)=\sup_{P\in K_i}f(P)$$

とおき，K_i の面積 $\mathrm{Area}\,K_i$ をこれらに乗じて

$$m_\varDelta(f)=\sum_i m_i(\varDelta)\mathrm{Area}\,K_i\leq M_\varDelta(f)=\sum_i M_i(\varDelta)\mathrm{Area}\,K_i$$

を考える．そして等式

$$\sup_\varDelta m_\varDelta(f)=\inf_\varDelta M_\varDelta(f)$$

が成立するとき，f は K 上で積分可能であるという．このとき上の値を

$$\iint_K f(x,y)dxdy$$

と書く．1 次元の場合と同様に，連続関数は積分可能であるという基本定理が成立する．

次に面積の定義を述べる．平面上の有界閉集合 $A\subset\mathbb{R}^2$ を考える．$A\subset K$ となるような長方形 K を取り，関数 $\varphi_A:K\to\mathbb{R}$ を

$$\varphi_A(P)=\begin{cases}0 & (P\notin A),\\ 1 & (P\in A)\end{cases}$$

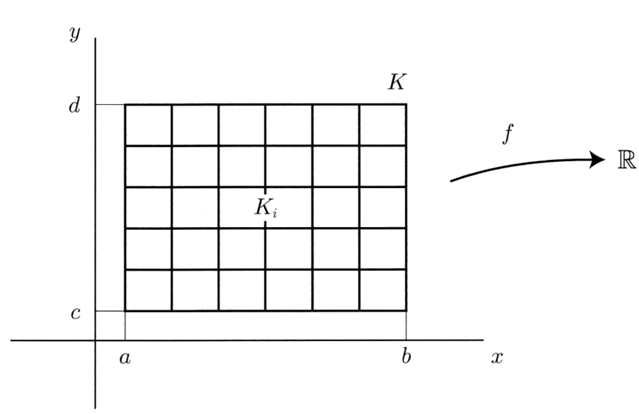


図 2.5　長方形の分割.

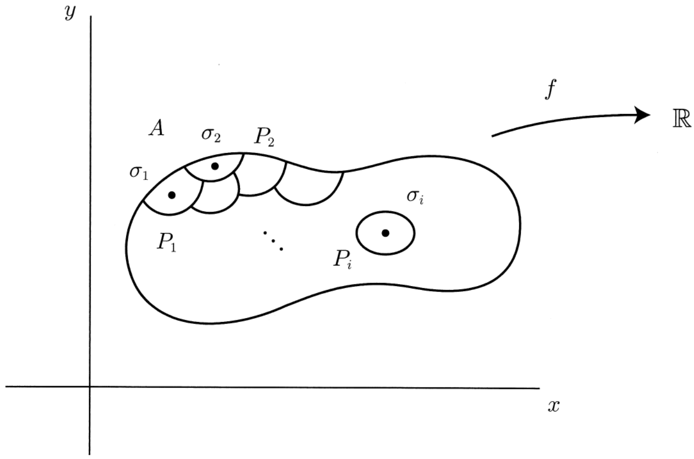


図 2.6 $\iint_A f(x,y)dxdy$ の定義.

と定義する．このような関数を A の定義関数という．φ_A が積分可能であるとき A は面積を持つと言い

$$\mathrm{Area}\,A = \iint_K \varphi_A dxdy$$

と書く．

積分可能な有界関数 $f: A \to \mathbb{R}$ と，面積を持つ有界閉集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ に対し

$$\iint_A f(x,y)dxdy$$

が定義され，それは次のように表示されることが分かる．A を面積を持つ有限個の小区域 σ_i で分割し，$\rho(\sigma_i) = \max_{P,Q\in\sigma_i} d(P,Q)$ とおく（d は 2 点間の距離を表す）．このとき

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \lim_{\rho(\sigma_i)\to 0} \sum_i f(P_i)\mathrm{Area}\,\sigma_i \quad (P_i \in \sigma_i)$$

が成立する（図 2.6 参照）．

2.5 線積分から面積分へ

面積分とは，平らな平面上で定義された関数の 2 重積分を，空間内の曲がった曲面上で定義された関数の積分に一般化する概念である．1 次元の線積分の定義を，2 次元に一般化したいのであるが，実はそのままの形ではうまくいかない．曲線の場合と異なり，曲面の場合は 2 変数による大局的なパラメータ表示が一般にはできないのである．あるいは，曲線を折れ線で近似したように，曲面上に有限個の点を細かく配置し，それらを結ぶ三角形によって曲面を近似することも考えられる．しかし，1 次元と 2 次元の本質的な違いが現れて，これもうまくいかないことが分かる．詳しくは，後に扱う面積分の回で述べる．

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

科学と社会

第11回 国家・学問・戦争の諸相

盗電の法理，穂積陳重の逡巡

岡本 拓司

前回は，最新の医学の成果が却って人々に災厄をもたらした例として，明治期の脚気を取り上げた．今回は，脚気ほど深刻ではないが，科学が社会に混乱をひきおこした例として，やはり明治期におきた盗電問題をめぐる，物理学者・法学者などの議論を検討したい．

11.1 盗電と法律

日本で電灯の利用が始まるのは明治20年（1887年）前後であったが，日清戦争以後は広く普及し，明治35年（1902年）頃には，大阪電灯会社のみでも使用者が10,300名あり，40,000個を越える電灯が使われていたという[1]．同時に，電気工作の経験を持つ者も増え，明治33年（1900年）前後からは，その一部が，各地の電灯会社が設置した機器を無許可で加工し，契約外の電灯をつけるなどの振舞い（盗電）に出るようになったことが問題化していた．

盗電が問題化していたのは日本のみではなく，電気の利用が一般化した欧米にも見られた．しかし，当時の各国の刑法では，これが犯罪となり得るかどうかは容易に判定できなかった．盗電が窃盗の一種であるとすれば，電気が窃盗の対象となるわけであるが，法律によれば，窃盗の対象であるべき「物」は（刑法には「物」の規定がないことが多く，例えば日本の場合には民法や刑法草案を参考にした），具体的には固体，液体，気体の形をとるいわゆる物体，あるいは「有体動産」であり，一方で最新の物理理論では，電気はエーテル（通常は電磁波の媒体であると理解されるが，粒子をエーテル内の渦や特異点として扱う，つまり物質の特性をエーテルによって説明しようとする理論もあった）の振動を本質とするエネルギーの一形態であって，物体ではない．人為的に機械を用いて発生させた電気を盗用することに問題があるのは，社会通念上間違いないように思われたが，科学研究によって得られた知見とすりあわせながら，電気という最新技術の成果の利用を万全に保護するための法律は，当時はまだ整備されていなかった．

日本でも外国の事例には関心が集まっていた．盗電に対して，ドイツのミュンヘンの控訴院が有罪，大審院が無罪の判決を出したことが伝えられ[2]，さらにドイツ国内の盗電をめぐる法律家の論戦の様子の詳細も報じられた．ドイツの議論では，自然物のみを窃盗の対象と看做す主張に対して，閉じ込め持ち去ることができるもの，あるいは集めたり誘導したりできるものは，動産の性質をもち，従って窃盗の対象となり得るという反論が提出さ

れたことも知られていた[3]．なお，こうした議論から分かる通り，一時代前の，電気が特殊な流体であるとする説（流体説）が正しいとされていれば，ガスなどと同様，電気も窃盗の対象であると容易に認められたであろう．法律上の論戦を招いたのは，電気に関する物理理論の変遷であった．

日本でも関心を集めたドイツの盗電は，現在では「メーター事件」と呼ばれている．メーターを通す前に電流を引き込んで盗用したためである．この事件について，原審のキールの地方裁判所では横領罪は成立しないとし，ミュンヘンの上級地方裁判所（控訴院）は社会生活上の電気の意義を強調して窃盗の対象であると判断し（1895年），ライプツィヒのライヒ裁判所（大審院）は無罪の判決を下した（1896年）．原審では自然科学上の見解について鑑定人が証言を行い，電気の正体が何であるかについて結論は出ていないが，流体（気体，液体）であるという了解が得られているわけではないと述べていた[4]．

電気が物であるかどうかが不確定であるために窃盗罪が適用できず，社会に混乱が生ずるのであれば，電気が物であるかどうかを問題にしないまま（あるいは電気を物と考えることを諦めて），盗電をただちに窃盗とみなしてしまう条文を刑法の中に設ければよい．そのような措置をとったイギリスや，アメリカのコロラド州，マサチューセッツ州などの事例，および判例によって罪に問うたフランスの例や，コネチカット，ミシガン，モンタナ，メリーランド，ニュージャージー，アイオワ，ジョージア，ネブラスカなどでの処罰の実際も，日本の法律雑誌において紹介されていた[5]．

11.2 横浜電気窃盗事件と田中舘鑑定

日本で盗電が実際に裁判にかけられたのは，明治35年のことであった．前年11月から12月にかけて，横浜市尾上町の電気商，藤村清次郎は，電気職工の吉田治郎吉に協力させて，横浜共同電灯株式会社が自宅に取り付けた電灯線に支線を取り付け，自身の店の宣伝のため，また義太夫の温習会で灯りを必要とするなどの他家の需めに応じて，電灯会社の関知しない電灯を点灯した．設備が拙劣であることをみた者が電灯会社に連絡し，電灯会社の技師がいったん支線を切断したこともあったが，藤村は同様の行為を繰り返した[6]．

伊勢佐木町警察署長の野田耕夫は，盗電が刑事罰の対象となるか否かが確定していないという状況を知りつつも，電灯業が事業として成立している状況に鑑み，藤村の行為は看過できないと考えた．明治35年2月には横浜共同電灯が「電気盗用に関する上申書」を提出し，警察は告訴の手続きをとった[7]．横浜地方裁判所では，同月末に予審を終え，この一件を窃盗事件として軽罪公判に付すことに決した[8]．

横浜地裁での審議の過程で，電気に関する専門家として，東京帝国大学理科大学教授の物理学者，田中舘愛橘（1856–1952）が鑑定書を提出した[9]．鑑定書は7つの疑問に対して答える形をとっているが，裁判に直接影響した論点は2つである．まず，電気は「物件」なるか「作用若しくは力」なるかという問題であるが，田中舘は，現在の学説では電気はエーテルの作用であると理解されていると述べている．ただし，ではその物質が何かという問題については，これを原子に帰する考えもあれば，さらにその原子をエーテルの渦動であると見なす考えもあると説明し，後者の立場からは，エーテルの作用である電気も物質と見なし得ると論じている．さらに，近来の研究には，物質によって電気を説明するのではなく，電気の作用によって物質を説明しようとするものもあると述べ，結局，電気が物質であるか否かは，物質の定義によると注意している．それでも最終的には，電気は通常認識される固体流体ではなく，またニュートンの運動の法則に従うことをもって物を定義するのであれば，その範疇には入らないとしている．

次いで，電流は値のあるものか否かという問いに対しては，電流計（「電流針」）を設置して使用量に応じて料金をとる会社がある以上は，需要者による使用のために送られる電流には値があると言わざるを得ないと答えている．ただし，電流そ

れ自体，あるいは電流のなす効果に値があるかどうかという問題に対しては，値の意義に関する問題であるとして，回答を避けている．

田中舘の鑑定は，明治35年当時の物理学に基づくものとしては，1897年にJ.J. トムソン（Joseph John Thomson, 1856–1940）によって発見された，質量と電荷をもつ粒子である電子についての言及がない点がやや奇妙ではある．明治36年（1903年）には，電子の存在を織り込んだ土星型原子模型が長岡半太郎（1865–1950）によって発表されているので，電子についての理解が日本にも広まった時期としては，鑑定の1年後程度を考えておくのがよいのかもしれないが，それではやや時間がかかりすぎているようにも思われる．あるいは田中舘に，最新の学説の採用への躊躇があったのかもしれない．

また，物理学者からみれば，電子の発見によってエーテルの存在が否定されるわけではなく，また実質はエネルギーや振動であるという電気の本質についての理解が大きく変わるわけでもない．1905年の特殊相対性理論の帰結の一つは，電磁波の媒体としてのエーテルの存在は不要であるというものであったが，相対論自体の受容にも数年が必要であり，またエーテルという概念の利用は，相対論以後も長く続いた．

電子への言及がない点以外は，鑑定は物理学者のそれとして正当なものである．物質とは何であるかを問うのが物理学であるために，電気が物質であるか否かという問いには，物質の定義によると答えざるを得ないが，それでもニュートンの運動の法則という基準を用いて，電気が通常物質として理解されるものではないと指摘している．また，電灯業が事業として成立しているという事実を尊重しようという姿勢も見ることができる．

電子の発見が取り込まれていないために，電気の正体に関する田中舘の鑑定の結果は，ドイツの同様の裁判の際のものと同じであった．ところが，日本での判決は，ちょうどドイツの逆となった．つまり，横浜地裁では有罪（明治35年7月），東京控訴院では無罪（明治36年3月），大審院では有罪（同年5月）の判決が下された[10)]．控訴院の判決文では，藤村の肩書きは「平民弁護士事務員」となっており，また盗電問題を詳しく報じていた『法律新聞』の編集主幹，高木益太郎が控訴院で弁護人を務めていたことから，この裁判には，高木ら法律家が，刑法の不備の周知を目的に仕組んだものとしての性格があることを指摘する研究もある[11)]．この指摘が正しいとすれば，おそらくドイツでの経緯についても知っていた高木らにとって，大審院の有罪判決は意外であったであろう．

裁判の各段階での論理は以下のようなものであった．

横浜地裁では，会社が発電した電流は会社が運転して得た会社のものであり，鑑定書に記されている通り（実際には明示的ではないが），電灯を点ずればこれは消費されるので，正当な契約の下に送電を受ける必要があると判断した．弁護人は，鑑定を根拠に，電気は作用であって，民法や刑法草案の規定にある「物」には含まれないと主張したが，裁判官は，窃盗の対象となるのは「人の所有に係る可動物」であり，会社の起こした電流は人為的に蓄積・流動・移転等が可能であるため，窃盗の目的物たり得ると論じた．鑑定書は判決の論拠の一つとして用いられている．民法と刑法をいったん分け，さらに「物」と「窃盗の対象」も分けた上での判決であった．

同じ鑑定が，控訴院では無罪の論拠とされた．窃盗の目的物の規定としては，刑法草案の「他人に属する有体動産」が採用されており，従って電気が窃盗の対象となるためにはこれが有体物でなければならないが，田中舘の鑑定によれば電気はエーテルの作用であるために，盗電は窃盗罪を構成しないというのである．横浜地裁の判断については，窃盗罪は，財産権・所有権の目的物，すなわち有体物に関して成立するのであって，電気については成立しない，また，電気を権利の目的物であるとした個別の法規もないとして，これを斥けた．

大審院では，窃盗の対象については，刑法草案，民法，および物理学による物の定義を一切採用せ

ず，「窃取の目的たるに適するや否や」の判断をもって窃盗罪の目的を定めるとする論理が登場した．この定義はほとんど同語反復的，あるいは恣意的に見えるが，若干の説明もあり，窃盗罪の目的物は，占有・管理・蓄積・移転等ができればよく，また有体物でなくとも「五感の作用に依りて認識し得べき形而下の物」であれば所持の対象となる，電流はこれらの条件を満たしていると説明されている．たしかに電気は少なくとも触覚の対象であり，触れば死にいたることもある．やや揶揄を含んではいるが，アメリカにはこれを利用した死刑があることを指摘する議論さえあった[12)]．この大審院において，重禁固 3 月，監視 6 月という判決が確定した．

大審院の判断は「近来の大判文なり」[13)]と評され，多くの雑誌等で取り上げられた．このうち，東京帝国大学法科大学教授の岡田朝太郎（1868–1936）は，窃取という行為の特質に即して刑法が独自に窃盗の対象を定めるべきであるという態度には賛成の意を表したが，判決において電気の所持・移動とされている事態（いずれも電気が窃盗の対象であることの根拠とされている）については疑念を提示した[14)]．電気の所持とされているのは，実際には電気を起こす機械の所持であり，またある機械が発生させた電気を他の機械に移せば，その電気はもはや同じものであると言えない，つまり，そこで起こっているのは移動ではない，という主張である．岡田はさらに，大審院の判断が正しければ，隣の家から漏れる光線で読書をすることも，（他人の）蓄音器の音楽を聴くことも，（他人の）冷蔵庫でビールを冷やすことも，窃盗とされかねないと警告する．光線の例については，これは決して冗談ではなく，光は一種の電磁波であるから，電灯を点ずるのと違いはないとも注意している．

11.3 穂積陳重の議論

岡田の判例批評には，同時期に電気と法律の関係を論じていた穂積陳重（1855–1926）の文章への言及がある．穂積は，欧米において盗電の法理が関心を集めていたことを受けて，横浜の事件の数カ月前に法理研究会・法学協会において講演を行っており，その内容は，『法学協会雑誌』上に，「電気ト法律（上）（下）」[15)]として発表された．また，民法との関連について論じた「電気ト法律（民法）」[16)]も翌年に掲載されている．

穂積の議論は，ドイツ語圏のみならずアメリカやイタリアなどの事情も取り上げた包括的なもので，まず，電気は物ではないとする説（電気非物論．日本の民法など），電気は物であるとする説（電気物性論．ミュンヘン控訴院など）の両方の得失を検討している．そののち，電気が法律上物であるかどうかは，法律や裁判官の定める問題であって，鑑定者や陪審官の決定すべきものではないと論じ，また，物と権利の目的は同じではなく，物と同様に扱って便利なものであれば，思想的な存在でさえ物であると看做す擬制（「フヒクチヨ」(fictio)）は，文化が複雑化した社会においては混乱を招くため，避けるべきであると主張している．後者の論点からは，有体物でない電気は物とは看做すことができず，また，物は権利の目的たり得るものの一部に過ぎないとする帰結が生ずる．ただし穂積は，現行の法律にはこうした理解は反映されておらず，今後は法規改正が必要であると認めている．

さらに，電気の法律上の性質については，各国の法律の性格によって定まるというのが穂積の理解である．特に日本の民法では物とは有体物であると規定している点から，「若し某理学者の主張する如く電気は物質にして力に非らずとの説が正確なるに非ざれば」（このとき，電気は物質であると主張する理学者——田中舘以外であろう——がいたようである），電気は物ではなく，権利の目的になり得るとしても，物とする規定は適用できないと述べる．

以上のように電気の性格について議論したのち，穂積はまず刑法と電気の関係，具体的には電流窃盗が犯罪であるかどうか，犯罪であればその罪名は，窃盗罪，詐欺罪，財物毀棄罪，独立罪のいずれであるかを論ずる．ここでの議論の範囲を定めるのは，たとえ盗電が憎むべき行為であるとして

も，これを既存の刑法の「補充的解釈」，あるいは「類推適用」によって罰することがないようにするという原則である．これらは処罰の対象をいたずらに拡大するので，「刑法に於ては最も危険」であり，「厳禁」されているためである．

穂積はまず，盗電が無罪である根拠としては，電気が刑法上の物ではないこと，電気は奪取できないものであること，さらに刑法の規定は類推適用を許さないものであることが挙げられると指摘する．ただし類推適用の有無については，盗電が実際に窃盗に当たるかどうかの検討のあとに来る判断であり，類推適用禁止という原則のみで無罪論の根拠とはなるわけではないと注意している．次いで有罪論については，まず最も可能性の高い窃盗罪を検討し，「盗罪の物素」の観点からも（電気は物ではない），「盗罪の体素」の観点からも（エネルギーである電気を占有するというのは比喩に過ぎない），この罪は成立しないと論ずる．当然，横浜地裁の有罪判決には批判的である．なお，論文の脱稿前日（明治36年3月20日）に東京控訴院の無罪判決が出たが，判決の正文を見ていないので論評は控えるとの注記がある．次いで穂積は，詐欺罪などの可能性は否定するが，ドイツにおいて，盗電に対する無罪判決が出た後，英米の先例に倣わず独立罪とした法律（盗罪と毀棄罪に対応する条文がある）を設けて（1900年4月9日）対処した例を挙げ，「社会の需要」と「学術の進歩」を調和させていると賞賛した．

専門である民法に関する議論では，穂積は，送電契約が売買・賃貸借・雇用・請負・無名契約のいずれであるかを問うている．日本の民法によれば，有体物でない電気は物ではないことが明らかなので，売買・賃貸借ではなく，人的関係や労務に関わらないので雇用ではない．穂積は請負説を正確と看做すが，それへの反論も列挙している．

なお，送電契約が請負であるかどうかは，政府の請負を行う者は被選挙権を持たないとする条文をもつ衆議院議員選挙法にも関わる問題であった．実際，明治35年の総選挙ののち，山梨県市部で当選者となった東京電灯会社社長の佐竹作太郎（1849–1915）は，同社が東京郵便電信局と電灯点火の契約を結んでいたことから，次点得票者の林闇に当選訴訟を起こされていた．東京控訴院ではこの契約は売買ではなく請負であるとして当選無効とし，被告が大審院に上告したところ，衆議院が解散されて訴訟の目的が消滅し，大審院は判決を下さなかった．一方，明治36年の同様の訴訟において，函館控訴院は電灯点火契約は請負ではないと判断しており，同級裁判所の判例に正反対のものが存在するという事態に至っていた．

11.4 電子論と穂積の逡巡

生前刊行された著作に入れられなかった穂積の論文の多くは，死後，全4冊の『穂積陳重遺文集』[17]に収められた．このうち，「電気ト刑法（上）（下）」は昭和7年（1932年）刊行の第二冊に入れられたが（その際，（上）は「電気と法律」，（下）は「電気と刑法」と改題された），『法学協会雑誌』掲載時のものとは若干の違いがあり，また「電気ト法律（民法）」は『遺文集』には収められなかった．『遺文集』の編集には，抜刷りなどに穂積が修正を加えたものが使われているようであり，題目も含めた「電気ト刑法（上）（下）」の変更点は著者自身の雑誌掲載後の見解を反映している．また，「電気ト法律（民法）」が『遺文集』に含まれていないという事実は，穂積がこの論文の修正稿を作らなかったことを意味していると考えてよいであろう（『遺文集』の編者の穂積重遠（1883–1951）は初出誌を充分に調査しなかったようであり，「電気ト法律（民法）」は発見できていない）．

論文刊行後，穂積の認識を大きく変化させたものは，電子論の登場であった．『遺文集』掲載論文の本人による附記には，論文起草時，物理学者，特に電気専門家に質問をしたが，「当時電子論未だ普く行はれざりし為にや」[18]，ほぼ全員が電気は物ではないと返答したため，穂積も非物論を前提としたと書かれている．しかし，その後，電子論が広まり，「某理学者」の言の通り電気を物とするようになったため，「非物論」ではなく「物性論」（物

であるとする説）が普及すると考えなければならないようになった．それでも穂積は，論文の基礎は影響を受けないとも述べている．

雑誌掲載論文起草の際，穂積が相談した電気の専門家として，「電気ト法律（下）」で名前が挙げられているのは田中舘であるが，「電気ト法律（上）」には電気は物質であると主張する「理学者」への言及がある．いずれにせよ，おそらく論文の雑誌掲載直後，穂積は電子論の普及について田中舘などから聞き，電気を物であるとする強い論拠が現れたと考えるようになったのであろう．

電気が物であるとすると，民法上の物の規定と合致するので，例えば送電契約は売買と考えることができ，特に問題とする理由はなくなる．穂積が「電気ト法律（民法）」は修正して普及させるには値しないと看做したように思われるのは，このためであろう．刑法との関係についても，民法の規定をそのまま採用すれば電気は窃盗の対象となるので，論ずべき問題はなくなるように思われるが，刑法に物の規定がない点を考えれば，電気を窃盗の対象と看做す条文を別途設けるなどの可能性も想定することはできる．このため穂積は，「電気ト法律（上）（下）」については，主旨は生かしたまま，物理学では物でないものを刑法で物と看做すことの不自然さを指摘した箇所などを修正した草稿を残した．

穂積が雑誌掲載論文から削除した文章としては，以下のようなものがある．

之〔電気〕を物と為すは権利の目的即ち物なりと為す法制に於ては尚ほ或は可ならん，之を有体物と為すに至りては全く物理的観念に反するのみならず，法理上に於ても強力なる論拠を認むるに困〔あぐ〕まずんばあらざるなり[19]

これは，電気を窃盗の対象としたいがために権利の目的としたのみならず，空間に存在するものであるから物であると規定した議論に反駁した箇所である．空間に存在するというのみではもちろん不十分であるが，物理学が，電気の正体は電子という有体物であるという議論を提示するのであれば，法律上もこれを物であると看做すことに問題はなくなる．

なお，穂積がその後知る機会をもったかどうかは不明であるが，電子が存在することは，電気が物質であることを意味するわけではない．J.J. トムソンが陰極線の正体が電荷と質量をもった物質（粒子）であることを発見した際も，その速度は測定されており，導線中を電流が伝わる速度（ほぼ光速）よりはるかに小さいことが知られていた．電流は電場の伝搬であって，電子の流れではない．従って，電子が存在するとしても，電気はやはりエネルギーであって，物質ではないことに変化はない．

電子論は電気が物であると規定するわけではないのであるから，「電気ト法律（上）（下）」のみならず，「電気ト法律（民法）」も，電子論の普及によって論文としての価値を失ったわけではなかった．しかし穂積は，電子論の登場に振り回された経験からか，電気の本質に関わる物理学上の議論を，それ以上理解しようとすることはなかったようである．その判断は穏当なものであったように思われる．

11.5 刑法の改正と盗電

電気は社会の中で必要不可欠の存在となりつつあるが，その正体に関する物理学上の議論は，盗電を刑法の対象とするには不都合な変遷を辿りかねない．物理学研究の動向を外部から左右することが叶わない以上は，刑法のほうを，科学研究の進展の影響を受けないように改正するのが得策である．実際の盗電への対処も，そのような方向で進んだ．

盗電事件に対処しきれなかった刑法は，明治13年（1880年）7月公布，明治15年（1882年）1月施行のいわゆる「旧刑法」である．旧刑法に関しては，施行直後から改正作業が始まり，草案・改正案が幾つか作られたが，帝国議会での議論が尽くされず，明治40年（1907年）4月になってようやく新たな刑法（戦後も引き継がれたので，「現

行刑法」と呼ぶ）が公布され，同年10月から施行された．改正に長期間を要したのは，人権抑圧傾向が強まるとの懸念や手続きの秘密性への反発から，各地の弁護士会などが反対したためである[20]．しかし，改正作業の長期化の利点もあり，その一つは，明治35・36年の盗電事件の教訓が現行刑法に反映されたことであろう．

穂積は，明治32年（1899年）3月に発足した法典調査会第三部の委員などとして刑法改正に関与し，特に，明治39年（1906年）6月に司法省内に設けられた法律取調委員会では，「刑法改正主査委員会」（次いで「刑法改正起草委員会」となる）の委員長として改正案の作成に携わった[21]．

盗電に関わる条文が初めて現れたのは，上述の刑法改正起草委員会が提出した，明治39年の刑法改正案においてであった．第36章「窃盗及び強盗の罪」に，第270条「本章の罪に付ては電気は之を財物と看做す」が盛り込まれたのである[22]．この条文については，明治39年12月26日の法律取調委員会委員総会第27回において議論があったが，「電気を盗取したる者は窃盗を以て論ず」とするという修正案，および削除案が提出され，いずれも否決されて原案通りに決した[23]．明治40年（1907年）の第23回帝国議会に提出された「刑法改正案」では第246条となっていたが，その説明では，「第246条は新設の規定なり通説に拠れば電気は物に非ず故に電気を窃取したる場合を罰するために翻案を設くるの必要あるなり」[24]と述べられている．電気非物説にたって，電気を新たに窃盗の対象に加えようという主旨である．その後，明治40年に公布・施行された新刑法では，再び第245条となって，現在に至るまで引き継がれている．

以上の経緯を見ると，混乱をひきおこしたのは電気に関わる物理学上の研究の進展であり，しかも具体的な技術などが原因であったわけではなく，電気の正体に関する純粋な知識の変遷が問題の要であった．このため，法律の側でも，単に窃盗の対象を電気という特殊例を含める形で拡大するという，比較的容易な手続きによって対処することが可能であった．それでも，純粋な学術上の見解の変化が法や産業に影響を及ぼした例として，また科学研究の進展がもたらした実社会上の混乱を，法律の改正によって防ごうとしたごく初期の例として，注目に値する．

なお，当時，物理学者に対抗し得る「知識」の源としては電気工学者・電気技術者がいたが，例えば電子論をもって田中舘に反論を加えるといった行動をとることはなく，電流盗用に対しては，「種々苦辛の末器械上より之を防止するの策を講じ幾多の巧妙なる盗用予防器の発明を見るに至れり」[25]という態度で臨んだ．この姿勢には，物理学から分離し，技術的応用に特化した電気工学の特徴がよく現れている．また，業界団体である日本電気協会は，横浜盗電事件の推移を見ながら，大審院の判決によっては「単行法制定の要望を関係当局に建議することも辞せず」という姿勢をとっていたという[26]．

前回，今回は，科学技術が明治の社会に影響を及ぼした事例を取り上げた．次回は，明治維新以降，日本がもっとも早く世界水準の研究成果を挙げた医学分野に注目し，日本の科学者たちが世界を意識し始める過程を検討する．

参考文献

1) 『電気之友』，**136**号，1902年11月，648ページ．
2) 「電流盗用に関する判決例」，『法学協会雑誌』，**16**巻，1898年，874–875ページ．
3) 「独逸国に於ける電流盗用事件」，『法学協会雑誌』，**17**巻，1899年，61–66ページ．
4) 川添誠，「盗電行為と類推禁止—電気ないし電流は窃盗罪または横領罪の目的物となり得るか—」，『秋田法学』，**50**号，2009年，53–66ページ．
5) 前掲[3]，「独逸国に於ける電流盗用事件」；「電気窃盗の刑事処分」，『法学協会雑誌』，**19**巻，1901年，66–67ページ．
6) 「電気窃盗の判決」，『電気之友』，**133**号，1902年8月，493–497ページ．
7) 東京電力，『関東の電気事業と東京電力　電気事業の創始から東京電力50年への軌跡』（本編），日本経営史研究所，2002年，66ページ．
8) 「電気泥坊」，『電気之友』，**129**号，1902年4月，254–256ページ．
9) 「電気窃盗の鑑定」，『毎日新聞』，1902年6月25日．
10) 「電気窃盗の判決要旨」，『法律新聞』，**96**号，1902年7月21日，114–115ページ；「電気窃盗は無罪」，『法律新聞』，**132**号，1903年3月30日，243–245ペー

ジ；「電気窃盗は有罪」，『法律新聞』，**141** 号，1903 年 6 月 1 日，527–529 ページ．

11) 中川徹，「横浜盗電事件再考」，『電気学会研究会資料　誘電・絶縁材料　電気技術史　合同研究会』，DEI-93-52〜62HEE-93-1〜11，1993 年 3 月 15 日，65–70 ページ．

12) 穂積陳重「電気と法律（下）」，『法学協会雑誌』，**21** 巻，1903 年，453–482 ページ．

13) 「電流窃取事件の大審院判決」，『法学志林』，**44** 号，1903 年 6 月 15 日，106–107 ページ．

14) 岡田朝太郎，「電流盗用事件の判例を評す」，『法学協会雑誌』，**21** 巻，1903 年，1008–1015 ページ．

15) 穂積陳重，「電気ト法律（上）（下）」，『法学協会雑誌』，**21** 巻，1903 年，161–179 ページ，453–482 ページ．

16) 穂積陳重，「電気ト法律（民法）」『法学協会雑誌』，**22** 巻，1904 年，153–168 ページ．

17) 穂積重遠，『穂積陳重遺文集』（第一–四冊），岩波書店，1932 年–1934 年．

18) 穂積重遠，『穂積陳重遺文集　第二冊』，岩波書店，1932 年，541–542 ページ．

19) 穂積陳重，前掲[15]，「電気ト法律（上）」，170 ページ．

20) 吉井蒼生夫，『近代日本の国家形成と法』，日本評論社，1996 年，174–175 ページ．

21) 吉井，前掲[20]，『近代日本の国家形成と法』，178 ページ．

22) 内田文昭・山火正則・吉井蒼生夫，『日本立法資料全集 26 刑法〔明治 40 年〕(6)』，信山社，1995 年，147 ページ．

23) 内田・山火・吉井，前掲[22]，『日本立法資料全集 26』，247 ページ．

24) 内田・山火・吉井，前掲[22]，『日本立法資料全集 26』，363 ページ．

25) 加藤木重教，『日本電気事業発達史　前編』，電友社，1916 年，701–702 ページ．

26) 渡辺市松編，『三十年史』，日本電気協会，1953 年，27 ページ．

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

リレー連載

人物で学ぶ物理

創始者の思考で学ぶ

第10回

仮説クリエーターとしてのデイヴィッド・ボーム

井元 信之

1. はじめに

昨年（2012年）の5月，日立の外村彰博士が主催する国際会議があり，世界の著名な量子物理学者が集まった．博士はこの会議の少し前に病没したため，会議は博士の追悼シンポジウムの様相を呈することとなった．博士は電子顕微鏡を用いた量子物理の基礎に関する数々の業績で高い評価を得ているが，中でもAB効果（アハラノフ・ボーム効果）の実証実験は名高い．この会議にはアハラノフも出席していたが，1992年に亡くなっているボームの姿はむろんなかった．

亡くなる2年ほど前の1990年，筆者はボームに会い，数時間ほど話をしたことがある．その目的は，彼が作ったいわゆる「非局所的隠れた変数」による量子力学の新しい定式化——量子ポテンシャル理論——に関するインタビューであった．この理論についてもAB効果についても本稿で簡単に触れるが，その後気になっていたのは，関連性がないように見えるこの2つの理論には何か発想の共通点はあるだろうかということであった．今でこそAB効果は正しいと認識されているが，外村博士が検証実験結果の論文を投稿したときは「そんな効果はこの世に存在しない」という査読レポートと共にリジェクトされたという逸話があるほど，当時はAB効果を眉唾的に見る人が多かった．量子ポテンシャル理論に至っては，「量子力学と同じ計算結果を与える理論というけれど，ちょっとね…」という風に，支持する人は稀な状況である．

要するにボームは，物理の主流派の先頭を切って来たというよりは，人と違う考えを持って歩んだ人というイメージがある．しかし科学の最前線というのは，正統主流派が先導するウェーヴフロントに他の物理学者たちが引っぱられて行く図式ばかりではなく，むしろ試行錯誤するパイオニアたちのウェーヴフロントがあちこち先回りして，それらのふもとに後から正統主流派が形成されて行く図式のように思える．そういうパイオニアたちには，仮にその仮説が最終的に採用されないことがあったとしても，どうにも抗えない魅力を感じる．

2. 量子力学の観測の問題[1)]

量子力学には不確定性原理というものがある．この言葉は注意して使用する必要があるので，そのことに一段落を費やそう．まず「物理量そのものが有する不確定関係」を述べる．すなわち，ある一つの状態に準備された十分多数の系を約半数ずつの2グループに分け，グループ1では物理量Aを，グループ2では物理量Bを高精度測定し，そ

の結果得られる A の不確定量と B の不確定量の間の不確定関係を問題とする．なぜ半々にグループ分けするかというと，物理量 A と B を同時に高精度測定することができないことが多々あり，むしろそのような場合こそ興味があるからである．よく引き合いに出される例は A が粒子の位置で，B がその運動量である場合である．さて，グループ分けせずすべての系のそれぞれについて A の測定直後に B の測定をすればよいではないかと思うかもしれない．ところが一般に物理量 A の測定は B を不確定にし，その逆も言える．これは「測定の精度とその測定の反作用との間の不確定関係」である．測定に伴う不確定関係の影響を受けずに物理量そのものの不確定関係を抽出しようと思えば，グループ分けしてそれぞれ物理量 A と B の測定に専念する図式にするのがよいわけである．こうして量子力学には物理量そのものの不確定関係と測定に伴う不確定関係があるのであるが，その関係は最初に用意した「ある一つの状態」が何であるかに依存する．しかし状態が何であってもこれ以上 A と B の両方を精確に決められないという関係がある場合，それを最小不確定関係という．

古典的描像からすると，いつも決まった状態に準備された系において物理量が不確定となること自体考えられない．不確定となるのは，毎回違った状態になっているのであり，我々が単なる知識不足からそれを確率的にしか知らないからである．しかし事実は不確定関係があることを実験結果は物語る．

このことを記述するため量子力学では系の状態を波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ で記述する．粒子でいえば，位置が $\boldsymbol{r}_0$ に確定している粒子の波動関数は $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ であり，運動量が $\hbar\boldsymbol{k}_0$ に確定している粒子の波動関数は $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r})$ である（$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの）．位置も運動量も有限の不確定量を持つ状態はいくつかの波を中に含む有限長の波束で表される．これが時間とともに変化するので，波動関数は $\psi(t,\boldsymbol{r})$ と表され，誰もその粒子を見ない限り，その時間変化はシュレーディンガー方程式で記述される．

さて位置や運動量が適当な不確定量を持つ状態において，その粒子の位置を高精度測定して $\boldsymbol{r}_1$ という値を得たとすると，その粒子の波動関数は突然 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$ となる．あるいは運動量を高精度測定して $\hbar\boldsymbol{k}_1$ という値を得たとすると，その粒子の波動関数は突然 $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})$ となる．このような，測定に伴う波動関数の変化は波束の収縮と呼ばれている．その変化の計算法はノイマンの射影として知られている．

すなわち量子力学は，測定を伴わない変化はシュレーディンガー方程式を使い，測定過程はノイマンの射影で記述するという二段構えになっている．前者は時間的に可逆な変化であり後者は非可逆である．コペンハーゲン解釈と呼ばれる正統派量子力学では，この二段構えは解消する必要はないとするが，量子力学誕生当初からこの二段構えを解消すべく様々な努力が払われて来た．

その中の一つに隠れた変数という考え方がある．これは，物理量が不確定となったり測定によって急に確定したりするのは，我々の情報不足の程度を示すものであって，客観的には情報を担っている変数があるのだろうという考え方である．もちろん「だろう」というだけでは理論にならず，具体的にそういう理論を作る必要がある．以下に紹介するボームの「量子ポテンシャル理論」[2)]は隠れた変数の理論の一つということができる．もっとも，その先で紹介するボームに対するインタビュー[3)]の抜粋から明らかなように，ボーム自身は「隠れた変数」という言い方を好んではいなかった．

ボーム理論を紹介する前に，とり急ぎ科学史的コメントをしておこう．この理論が出たのは 1952 年であるが，その後 1964 年に J.S. ベルが有名な「ベル不等式」を発表する[4)]．これは測定値の相関に関する不等式であり，局所性と実在論に基づくいかなる「隠れた変数の理論」も満たさなければならない不等式である．ベル不等式の検証実験は数多くなされ，未だ完璧ではないとされるが，多くの実験，とりわけ局所性検証に手をつけた初めてのものとして重要視されるアスペの実験[5)]によりベル不等式が破れていることが示された．これは，

「局所隠れた変数」の理論が間違っていることを意味する．ではボームの理論が間違っているかというと，そうではない．ボームの量子ポテンシャルは非局所隠れた変数なので，ベル不等式が破れているからといって否定されるものではない．

3. 量子ポテンシャル理論

先に，ボームは隠れた変数という言い方を好んではいなかったと書いたが，論文のタイトルはまさに "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables, I and II" となっている．その理論の導出は決して観念論的ではなく，実に具体的で面白い．量子力学が正しいことは明らかなので，ボームはあくまで量子力学から出発し，その新解釈を導こうとする．

まず単一粒子のシュレーディンガー方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(\boldsymbol{r})\psi \qquad (1)$$

から出発する．ψ は複素数なので

$$\psi=R\exp\left(\frac{\mathrm{i}S}{\hbar}\right) \qquad (2)$$

と極形式で書ける．(2) 式を (1) 式に代入して数行の計算ののち実部と虚部を両辺それぞれ等しいと置くと

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\left(R\nabla^2 S+2\nabla R\cdot\nabla S\right) \qquad (3)$$

および

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\left[\frac{\nabla S\cdot\nabla S}{2m}+V(\boldsymbol{r})-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}\right] \qquad (4)$$

を得る．すなわちシュレーディンガー方程式 (1) を ψ の絶対値 R の方程式 (3) と位相 S の方程式 (4) に書き下した．次に，$R=\sqrt{P}$ となる正の（非負の）数 P を導入すると，(3) と (4) はそれぞれ

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\nabla\cdot\left(P\frac{\nabla S}{m}\right)=0 \qquad (5)$$

および

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V(\boldsymbol{r})-\frac{\hbar^2}{4m}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}+\frac{\nabla^2 P}{P}\right)\right]=0 \qquad (6)$$

と書ける．ここまで初等ベクトル解析のよい練習問題である．

ここで $\hbar\to 0$ とした極限，すなわち古典論の場合を考えてみよう．すると (6) 式は，ポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ 中を泳ぐ粒子について，S*1) が古典的なハミルトン–ヤコビの方程式の解であることを示している．運動方程式に従う粒子の軌跡のアンサンブルを考えるならば，次のことがよく知られている．すなわち $S=$const. であるような曲面を空間内に一つとり，すべての軌跡がこの面に垂直であるとき，これらの軌跡は他のすべての $S=$const. であるような曲面群に垂直である*2)．

このとき $\nabla S(\boldsymbol{r})/m$ は速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ に等しい．これを使うと，もう一つ残っていた (5) 式は

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\nabla\cdot(P\boldsymbol{v})=0 \qquad (7)$$

となる．この式は $P(\boldsymbol{r})$ をこの集団に対する粒子の存在確率と解釈するとつじつまが合う．そうすると $P\boldsymbol{v}$ はこの集団における平均的な流れとなり，(7) 式は確率の保存を意味する．ちなみにこれは流体力学における圧縮性流体の質量保存の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

に対応する．ρ は質量密度である．

それでは，上のような解釈が，量子力学に戻って $\hbar\neq 0$ とした場合にどれだけ通用するか，考えてみよう．(6) 式において，それぞれの粒子が "古典" ポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ だけでなく，余分のポテンシャル

$$U(\boldsymbol{r})=-\frac{\hbar^2}{4m}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}+\frac{\nabla^2 P}{P}\right)\right]=-\frac{\hbar^2}{m}\frac{\nabla^2 R}{R} \qquad (8)$$

の下で運動しているとしよう．つまり粒子は $V(\boldsymbol{r})+U(\boldsymbol{r})$ というポテンシャルの中を動いていると考えるのである．そうすれば (6) 式は依然としてハミルトン–ヤコビの方程式であり，$\nabla S(\boldsymbol{r})/m$ も依然として粒子速度であり，(5) 式は依然として確率保存の式である．これはシュレーディンガー方程式を書き変えただけのものであり，しかしそ

*1)　解析力学の教科書では W と書かれることが多い．

*2)　この様子は江沢洋氏の 2009 年の本誌の記事[6]に直観的でわかりやすい説明があるので一読を勧める．

の解釈は，ポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ 中を動く量子力学的粒子は $V(\boldsymbol{r})+U(\boldsymbol{r})$ 中を動く古典粒子と見なせることを見通しよく示している．この余分に付け加わるポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ を「量子ポテンシャル」とボームは名付けた．もちろんこのポテンシャルは，外部条件として与えられた $V(\boldsymbol{r})$ と異なり，何か粒子自身の存在確率の分布 P に依存している．粒子としての存在確率 P と波としての位相 S が互いに絡み合って発展しているので，ド・ブロイの「パイロット波」を観念でなくきちんと定式化したとも言える．

この理論を使えば，初期時刻における粒子の存在確率分布と位相の空間分布さえ与えれば，以後はまるでリウヴィル方程式のごとく発展を追える．つまり初期時刻における粒子の存在確率分布と位相の空間分布が「隠れた変数」とも言える．通常の量子力学の解釈では $|\psi|^2$ は測定して初めてそこに見出されることがわかる確率なので「発見確率」というのが妥当であるが，ボームの解釈では「存在確率」と言うことになる．使っている数式自体はシュレーディンガー方程式そのものであることがわかるであろう．引き続くボームの論文ではエンタングルした粒子系を扱っている．そこでの考察により，ボームの理論は非局所性を帯びていることが示される．ボームの理論がベル不等式を破ることはこのことからも当然である．通常の量子力学と──その解釈以外──何ら変わりはない理論なのだ．

4. AB 効果と実在論者としてのボーム

よく知られている通り，アハラノフ・ボーム効果は「荷電粒子は電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{B}$ ではなくベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ および電位 ϕ に感ずる」とする理論で，これはその正しさが外村博士により実証され，したがって対立仮説「荷電粒子は電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{B}$ のみに感ずる」は間違いであることがわかっている．この意味で量子ポテンシャル理論のように「その説も否定はされていない」というよりは，強い立場にある．

しかしその数式的導出を見ると，量子ポテンシャルのときと同様な香りがする．AB 効果の導出は量子ポテンシャル理論よりずっと頻繁に解説されているし紙面の都合もあるので，ここで詳細には導かないが，あらすじは次の通りである．

まず，電磁場だけに着目するならば，$\boldsymbol{A}, \phi$ と異なる $\boldsymbol{A}', \phi'$ であってもゲージ変換

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \nabla\chi, \quad \phi' = \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{9}$$

を満たしさえすれば，同一の電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ を導く．したがって χ をどうとるかによって $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は変わらないのに $\boldsymbol{A}$ や ϕ は値や空間依存性まで変わってくる．これより，電場や磁場こそ実体であり，ベクトルポテンシャルや電位は実体ではないと思いたくなる．

一方，電磁場中の荷電粒子のハミルトニアンは通常 $\boldsymbol{A}$ や ϕ で書かれ，それは $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ で書き直すことができる場合が多い．ところがソレノイドの外側のように，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}=0$ なのに $\boldsymbol{A}$ が 0 でない場合があり，その場合ソレノイドの右を通過する粒子と左を通過する粒子には波動関数の位相差が付く．$\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ のみに感ずるとするとそうはならないので，これは荷電粒子が $\boldsymbol{A}$ や ϕ に感ずることを意味する．数式をたどれば明らかなのに，以上のことは長らく正しくないであろうとする意見も数多く見られた．それが実験によって正しいということが実証されたわけである．

詳細を追えば量子ポテンシャルのときと似た理論の展開に親近性を感じるが，ボームは，そしてアハラノフもであるが，根っからの実在論者なのだと思う．スカラーとベクトルの違いがあっても，量子力学の波動関数も電磁気のベクトルポテンシャルも，計算上の便法として有用というだけでなく，物理的実体と思いたいのだと思われる．その方向に理論を進めることが AB 効果では大成功を収め，量子ポテンシャル理論では，誤りではないと認識されつつも支持者は少数にとどまっている状況である．

5. ボームとの対話

前述したように筆者は 1990 年にボームに会い，量子ポテンシャル理論について 2 時間ほどインタビューしたことがある．その中からの対話を抜粋

しよう．なお抜粋すると直訳では不自然になることもあるので，その場合は言葉尻に意訳も交えていることを断っておこう．以下 B はボーム，I は筆者である．

I: あなたの理論は通常の量子力学と何か違った結論を導くことがあるのでしょうか?
B: そういうことはありません．解釈がちがうのであって，理論自体は同じです．
I: 単なる計算手段としての理論より，その意味を問うことの方が重要だということですか?
B: そうです．意味を問わなければ物理ではない．大抵の物理学者はただ計算するだけのコンピューターにはなりたくないはずです．

これはボームの基本的スタンスのようだ．

I: 非局所的相関（エンタングルメント）はあなたの隠れた変数ではどのように記述されますか?
B: 隠れた変数とは言いたくありません．むしろ波と言いたいのです．しかし近接作用として伝わる波と違うことがあります．第一の粒子を測定したとすれば，量子ポテンシャルは瞬時に第二の粒子にも影響します．
I: それは相対論と矛盾することはないのですか?
B: 矛盾すると考えなければならないことはありません．特に，統計的には矛盾しません．個々の事象は逸脱することがあるかもしれません．
I: 相対論は統計的な量に関してのみ適用されるべきと?
B: そうです．もしくは巨視的現象ですね．

相対論は統計量に適用されるという考えだ．

I: 系と観測者の分離可能性についてのお考えは?
B: ボーアは系と測定器を分けることはできず一体と言いますが，私は分離可能性にもある程度執着しています．ボーアは観測されなければ系について語れないと言いましたが，私は観測されたか否かに関わらず宇宙は存在していると思います．そして測定というのは，宇宙のある部分が他の部分を測定したと記述されます．

客観的実在を重要視している．

I: 隠れた変数が常に隠れていて知ることができなければ，確率事象と同じことではないですか?
B: 隠れた変数という用語は 1940 年頃から人々が口にし出したので，本当に隠れているのかは判らないのですよ．ギリシャ時代は原子は概念だけで隠れていましたが，今は現実になっています．
I: そうするといつの日か隠れた変数があらわになるのでしょうか?
B: そうなってもおかしくないと思います．一方で，私が言うことはあくまで仮説です．科学は常に仮説の提唱で進歩するものです．だから私の仮説が絶対正しいとは言えませんが，少なくとも自然を理解する過程で必要だと思います．結果的に真実が若干違っていたとしても．

仮説の提唱に非常な重きを置いている．

I: 非局所隠れた変数を使って超光速通信をすることはできますか?
B: できません．通信をするには，それが何であるか知るだけでなく，制御できなければなりません．
I: 制御できないものであっても，自然を説明するために必要なわけですね．
B: そうです．
I: 不確定性原理は残りますか?
B: 残ります．
I: アインシュタインはなぜあれほど量子力学に異議を唱えたのでしょう?
B: アインシュタインは量子力学に異議を唱えたのでなく，その解釈に異議を唱えたのです．計算法として正しいことは明らかですからね．我々と無関係に宇宙は存在するということに反対されると受け入れられなかったのです．
I: あなたが局所性と実在性を捨てるとしたらどちらですか?
B: 局所性です．実在性は捨てられません．

ボームの根底には実在論がある．そう考えると，量子ポテンシャルの理論も AB 効果の理論も，なぜ

そういうことを考えるのか，気持ちが理解できる．

6. 量子ポテンシャル仮説は生き残るか？

筆者は相対論を信奉しているので，相対論に抵触しかねないボームの量子ポテンシャル理論には一抹の抵抗を感じていた．しかし最近，それも一つの可能性と留保しておくべきかもしれないと思うことがある．それは我々は量子力学については計算方法の域を超えておらず，感覚的に理解しているつもりでも，計算ばかりして来た結果の慣れにすぎないのかもしれないという点である．なぜこの世界が量子力学になっているか，それを理解するためには量子力学からずれた世界を考察する必要がある．ちょうど電波の最適受信地点を探すために携帯電話を空間的にずらしてみるのと同様に．

例えばベル不等式の一種である CHSH 不等式は古典論（局所実在論）では 2 を超えることはないが，量子力学では $2\sqrt{2}$ まで行く．量子力学を信奉する身としては $2\sqrt{2}$ より小さい世界がむしろ不自然に思えるが，仮にそういう世界があるとすると，量子情報処理は非力になって行く．では $2\sqrt{2}$ を超える（架空ではあるが）世界があると量子情報処理に相当するものはより強力になって行くかというと，必ずしもそうでないかもしれない．情報処理とは知らない状態から知った状態への差分が大きいことに意味があるので，もともと何でもありの世界ではその差分がかえって小さくなるかもしれないのだ．

また $2\sqrt{2}$ を超える世界では超光速通信が可能かというと，こちらはより明確に「そうでない例がある」ことがわかっている．例えばポペスク・ロールリッヒのブラックボックス（PR 箱）[8] と呼ばれる箱は離れた二地点にまたがる長い箱であるが，片方の地点で箱に 1 ビット入力すると同一地点で 1 ビットの答を出す．しかしその答を計算するためにもう一方の地点での入力値も使っており，それを瞬時に計算して返すという架空の箱だ．この箱は量子力学より遙かに進んだ世界で，ベル不等式は 4 にまで達する．ではこの箱の入出力特性を利用して瞬時通信ができるかというと，できないのだ．つまり箱の中は瞬時通信しているが，箱の外の我々はそれを使って瞬時通信はできないようになっている[8,9]．

PR 箱のベル不等式は 4 まで破れるが，「量子力学の箱」は $2\sqrt{2}$ にとどまっている．しかしボーム理論で見て来たように，量子力学の箱は PR 箱と似ていて，箱の中では非局所隠れた変数が動いており，外にいる我々はそれを利用して超光速通信を行うことはできない．ボーム理論はそのように解釈することもできる．

情報面からの要請で量子力学が自然な世界になっていることを導く試みが，純粋な物理学者であるボームの理論と接点があると考えることは楽しいが，楽しみを超えて実りとなることを期待したい．

参考文献

1) 本節（第 2 節）に関する文献は多岐に渡るが，1983 年までの文献は Quantum theory and measurement, edited by J.A. Wheeler and W.H. Zurek, Princeton University Press (1983) に網羅されている．また同年までの考え方の紹介はフランコ・セレリ：Die Debatte um die Quantenthorie (1983)，櫻山義夫訳：『量子力学論争』，共立出版 (1986) も参照のこと．
2) David Bohm, *Physical Review*, **85**, 166 (1952).
3) ボームへのインタビューについては井元信之：「量子力学の解釈問題」数理科学第 **40** 巻第 7 号，pp.50–57 (2002)，または別冊・数理科学 2006 年 4 月号「量子の新世紀」pp.46–55 (2006) 参照．ボーム以外にデイヴィッド・ドイチュやパイエルスのインタビューの抜粋もあり．三者三様の対比がうかがえる．
4) J.S. Bell, *Physics* **1**, 195–200 (1964).
5) A. Aspect *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981); ibid **49**, 91 (1982).
6) 江沢洋「波動方程式の創造」数理科学第 **47** 巻 9 号，p.8–13 (2009).
7) Y. Aharonov and D. Bohm, *Physical Review* **115**, 485 (1959).
8) S. Popescu, D. Rohrlich, *Found. Phys.* **24**, 379 (1994).
9) 立本貴大：2010 年度修士論文「物理的要請に基づく量子論の再定式化に向けた二者間ゲームの解析」．なおこの第 I 部は本稿第 6 節に関する導入にもなる．

（いもと・のぶゆき，大阪大学大学院基礎工学研究科）

特　集（2013年4月号予告）

解析学における様々な発想

現象の本質を解き明かすために

本体952円

特　集（2013年2月号）

《量子化》の発想

可積分系から幾何学まで

本体952円

編集後記

今回の特集では光に関連した様々な自然現象が登場しました．あらためて自然の偉大さを感じます．また，目で感じられる現象を数式で表現できるわけですから，数式の力にも驚かされます．

数式での表現は場合によっては難しくなってしまいますが，自然現象は体で感じることができます．数式に悩んだら，自然現象を感じて一息入れるのもいいのではないでしょうか．　(R)

＊　　＊

今回は「光」という自然現象との関わりが深いテーマを特集しました．

私が物理学に興味を持ったのは，自然現象を様々な手法を使って理解を深めるといったところが面白いと感じたからです．自然現象の不思議さを，人が体系化した数学などの道具を用いて説明できるというところが魅力的だと思いました．

本特集を通して，改めて物理学の面白さを感じることができました．　(T)

数　理　科　学　3月号

2013年3月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社　**サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁